Medida y Proporción
en la expresión artística

Gregorio Martín García-Cuerva



MEDIDA Y PROPORCIÓN
EN LA
EXPRESIÓN ARTÍSTICA

Gregorio Martín García-Cuerva

MEDIDA Y PROPORCIÓN EN LA EXPRESIÓN ARTÍSTICA

Universidad de La Rioja
Servicio de Publicaciones



publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

ISBN: 978-84-697-0037-2

PRÓLOGO

El lector que se disponga a hojear las páginas de este trabajo, sobre la DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN, sabe de antemano, que su autor no es ningún especialista en Historia del Arte que pueda bucear en los orígenes de las culturas griega y egipcia y participar, en unión de los padres de la cultura, en esas inigualables y apasionadas discusiones sobre el origen de la Expresión Artística. Se trata únicamente, como ya sabe, de una persona del mundo de las ciencias, y más concretamente de un ingeniero, que siente una gran afición por la Geometría y por todo su entorno.

Esta gran afición por el arte de **razonar bien sobre figuras mal hechas**, que es como algunos definen, medio en broma medio en serio, a la Geometría, le ha llevado al estudio y profundización de un tema que, además de su resolución geométrica, ha estado siempre acompañado, desde los inicios de nuestra cultura, por las más acaloradas discusiones, por parte de los antiguos sabios de Grecia y Egipto, que han querido ver en su resolución el origen de muchos trazados y construcciones artísticas.

No cabe duda, de que este trabajo habría cumplido ampliamente sus objetivos si el autor hubiese desarrollado únicamente la segunda parte del mismo, pues en ella podría haber aportado, como así lo ha hecho, sus conocimientos geométricos sobre este tema.

Sin embargo, ha considerado que este estudio geométrico no estaría completo si no se le acompañase del otro estudio realizado desde la antigüedad y que tanta importancia tuvo en la aparición y desarrollo de la Expresión Artística.

Los antiguos sabios de Grecia y Egipto consideraban a la proporción: $\frac{AB}{PA} = \frac{PA}{PB}$, que nos expresa la partición de un segmento en media y extrema razón por un punto P, como la razón de la ***sección áurea***. Esta ***sección áurea* o *divina proporción***, era para ellos imprescindible en la realización de cualquier obra de arte tanto arquitectónica, escultural o pictórica.

Para que el lector pueda saciar su curiosidad artística, buceando en los orígenes de nuestra cultura, es por lo que el autor ha creído oportuno ofrecer, como primera parte de este trabajo, una

completa compilación de la excelente obra EL NÚMERO DE ORO, cuyo autor, MATILA C. GHYKA, nos introduce, de una forma magistral, en los entresijos o misterios de aquella época, haciéndonos participar, sin darnos cuenta, en las conversaciones y discusiones que continuamente mantenían los padres de la cultura para defender sus respectivos postulados y axiomas.

El autor está plenamente convencido de que la lectura de esta documentada y curiosa obra, aumentará la afición del lector al estudio de la Geometría, hasta el punto, de que pueda llegar a repetir con el filósofo: **“Todo lo bueno y todo lo bello proviene de Dios, que se sirve de la Geometría para que los seres humanos interpretemos la belleza que Él intenta comunicarnos con constantes e inequívocos mensajes”.**

La belleza de una obra de arte o de un rostro humano no tiene, aparentemente, nada que ver con el mundo de los números y de las formulas. Sin embargo, los investigadores y los teóricos de la información artística han tratado, desde hace muchos años, de encontrar una relación matemática del arte. Según ellos, la obra artística se puede descomponer y medir hasta su ultima esencia: la belleza. ¿Se puede medir la belleza como si de un ente corpóreo se tratara?. Esta es la pregunta que se han planteado los llamados científicos del arte a lo largo de todos los tiempos. El hacer realidad este deseo de medir lo bello no es de ahora. Ya los antiguos maestros griegos relacionaban la estética con las matemáticas. Pitágoras, descubrió la relación entre la armonía musical y simples relaciones numéricas. Platón, por su parte, aseguraba que la autentica realidad la constituyen las formas o las ideas, y Aristóteles deducía de todo ello que el artista debe representar sus ideas en la forma de un objeto concreto. En consecuencia, una obra de arte no seria el reflejo de la realidad sino un ejemplo de una forma universal. Los padres de la cultura griega encontraron en las artes descriptivas, después de profundos y exhaustivos estudios, una relación entre la forma y la cifra, alcanzaron lo que hoy llamaríamos una medida estética: descubrieron el origen y el fundamento de todo tipo de belleza artística, tanto pictórica como arquitectónica, escondidos, según ellos, en la belleza de lo que coincidieron en bautizar con el nombre de *proporción áurea*.

Para estos pioneros de la cultura, la *proporción áurea*, no es sino una razón entre la suma de dos magnitudes consideradas y en la que una de ellas, la mayor, es igual a la razón entre ésta y la otra, la menor.

Aplicada esta proporción a las longitudes PA y PA en que un punto P divide a un segmento AB obtendríamos, como he dicho antes, la proporción:

$$\frac{AB}{PA} = \frac{PA}{PB}$$

que corresponde a lo que Euclides llama "**división de una longitud en media y extrema razón**". En esta división, el segmento mayor de los dos en que queda dividida esa longitud AB por el punto P es denominado *segmento áureo* o *segmento de oro* de esa longitud.

Para Leonardo Da Vinci y para la mayor parte de los artistas y estudiosos del Renacimiento, la *sección* o *proporción áurea* produce una impresión de armonía lineal, de equilibrio en la desigualdad más satisfactorio que cualquier otra combinación.

En 1.855, el alemán ZEYSING proclamaba: "**Para que un todo, dividido en partes, parezca hermoso desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor la misma razón que entre la mayor y el todo**".

Esta importante razón, objeto de admiración y estudio desde los orígenes de la cultura griega, fue llamada *divina proporción* por el monje boloñés FRAY LUCA PACCIOLI DI BORGO, que le consagró el magnífico tratado DE DIVINA PROPORTIONE, ilustrado por el genial y gran amigo suyo LEONARDO DA VINCI.

En este trabajo, vamos a estudiar esta famosa proporción en sus dos aspectos más importantes. En primer lugar, nos remontaremos a los orígenes de nuestra cultura y, a partir de aquellas fechas, nos vamos a sumergir de lleno en el estudio de una "proporción áurea", recorriendo, en compañía de los padres de la cultura, como humildes y ambiciosos alumnos, ese largo camino que nos llevará, sin duda, al conocimiento y aprendizaje de sus magistrales enseñanzas, permitiéndonos constatar y demostrar la importancia de esta *divina proporción* en el conocimiento y desarrollo de la Expresión Artística tal y como ellos proclamaban.

En segundo lugar, vamos a resolver el problema geométrico que se plantea: "**Dividir un segmento en media y extrema razón**". Para conseguirlo, vamos a exponer una serie de procedimientos geométricos de variada dificultad, obteniendo, con su ayuda, las soluciones buscadas.

Las construcciones geométricas que vamos a realizar en este estudio, no las exponemos a nuestros lectores como las únicas que pueden resolver el problema, sino que hemos elegido, por un lado, aquellas que pueden ser interesantes desde un punto de vista teórico y, por otro lado, aquellas construcciones prácticas del dominio de la geometría elemental.

Gregorio Martín García-Cuerva
Profesor de Expresión Gráfica
de la Universidad de La Rioja

PRIMERA PARTE

ORÍGENES DE LA DIVINA PROPORCIÓN O PROPORCIÓN ÁUREA Y SU APLICACIÓN A LA EXPRESIÓN ARTÍSTICA

Al comenzar esta primera parte de mi trabajo, creo conveniente y necesario por mi parte, remontarme o trasladarme al entorno cultural de la antigua Grecia para poder saborear y beber el agua enriquecida de sus fuentes y, de esta forma, recordar y disfrutar de aquellas inquietudes, que generalmente desembocaban en grandes debates, sobre cuestiones del más amplio abanico cultural y que traían como consecuencia las más exactas, convincentes y acertadas teorías y definiciones sobre esas cuestiones, calificadas por aquellos padres de la cultura como *elementales* y que nosotros vamos a tratar de actualizar para poder llevar a cabo este fascinante estudio sobre teorías y conceptos, tan importantes para nosotros, como son los que se refieren al número, la razón y la proporción.

Está probado, según se demuestra en numerosos documentos de aquella época, que, para los antiguos griegos, la importancia del número era fundamental. El mismo PLATÓN, nos asegura en su EPINOMIS: **“Los números, son el más alto grado de conocimiento”**; no contento con esta definición, vuelve a reflexionar sobre este tema y lanza un segundo juicio en el que asegura y afirma que: **“El número es el conocimiento mismo”**.

En el siglo I de nuestra era, aparece y destaca la gran personalidad de una figura muy importante de la cultura griega de nombre NICÓMACO. Apodado el de GERASA, por haber nacido en esta colonia griega de PALESTINA, cursó sus estudios en ALEJANDRIA, cuna de la cultura de aquellos tiempos.

Su obra matemática , está basada en un resumen, o en una compilación meticulosa y ordenada, de elementos tomados de los trabajos elaborados en la prestigiosa y brillante ESCUELA DE ALEJANDRÍA . Sin embargo, y para desgracia de todos nosotros, de su ingente trabajo intelectual, sólo nos han llegado intactas dos de sus obras: MANUAL DE ARMONÍA y su famosa INTRODUCCIÓN A LA ARITMÉTICA; el resto de su legado cultural, que se ha podido rescatar, está muy incompleto y en no muy buen estado de conservación.

Para NICÓMACO, al igual que para PLATÓN , existen dos clases de números:

- Número-Divino, Número-Idea o Número-Puro.
- Número-Científico.

Sin embargo, y a pesar de esta clasificación, en todos sus comentarios considera al primero como el modelo ideal del segundo, que, por otro lado, es al que nosotros consideramos normalmente como número.

Así mismo, no podemos olvidar que como en nuestro mundo material son las formas, que dependen como ya sabemos de cantidades de calidades y de disposiciones, las únicas cosas permanentes y que, además, la estructura de las cosas es su única realidad, es el Número-Divino o Número-Idea el que constituye la representación y el arquetipo director de todo lo creado.

En su INTRODUCCIÓN A LA ARITMÉTICA, profundiza en el estudio de este Número-Idea o Número-Puro y como consecuencia de este exhaustivo análisis encaja a los números en tres disciplinas diferentes:

- ARITMOLOGIA.
- ARITMÉTICA.
- CÁLCULO.

La primera se ocupa, según el, del Número-Puro; la segunda, a la que se refiere como a la ARITMÉTICA propiamente dicha, trata del Número-Científico abstracto y, por último, se refiere al CÁLCULO, como a una ciencia de grado inferior, a la que nuestro personaje considera como la aritmética para los negociantes.

Mas adelante, en un comentario sobre el CARMIDES de PLATÓN, vuelve a poner de manifiesto su postura respecto a todo lo anterior con esta contundente afirmación: **"El Cálculo o la Logística, es la teoría que se ocupa de los objetos enumerables, pero en ningún caso de los verdaderos números"**. Como consecuencia, no considera el número en el sentido propio de la palabra, no obstante afirma que 1 es la unidad y que, en definitiva, todo aquello que puede ser enumerado es un número. Por este motivo, toma 3 en lugar de la *triada* y 10 en lugar de la *década*, aplicándole después los correspondientes teoremas de la aritmética.

La distinción anterior, la justificaremos más positivamente si tenemos en cuenta que los griegos no utilizaban símbolos exclusivos de cifras para representar a los números, aunque fueran concretos, sino que usaban letras del alfabeto y, en ocasiones, algunos signos suplementarios. En Sicilia, los seguidores de PITÁGORAS, utilizaban, muy a menudo, grupos de puntos, lo que les llevó directamente a las propiedades estereométricas de los números, o lo que es lo mismo, a su utilización para la medición de sólidos y, como consecuencia, a los *números figurados*. Además, la aplicación de las cifras árabes y del sistema decimal facilitaron de tal forma el cálculo, lo que nosotros llamamos hoy aritmética, que trae como consecuencia el que nos olvidemos de la distinción entre Filosofía del Número, Teoría de los Números y Cálculo, así como de la diferencia

entre números ordinales y cardinales. Ha tenido que pasar mucho tiempo, hasta la creación de la Teoría de Conjuntos de CANTOR-RUSSELL, para darnos cuenta de que la cifra 2, el número dos, la *diada* o par, y la idea de Dualidad eran cosas totalmente diferentes.

Si sólo pensamos en números puros, y hacemos todo lo posible para olvidar las cifras, nos parecerá tan lógico como a PLATÓN y a NICÓMACO admitir que el número, según la expresión de NICÓMACO, es: "...**la esencia eterna de la realidad**", añadiendo a continuación: **"Todo lo que la naturaleza ha dispuesto sistemáticamente en el Universo, parece haber sido, tanto en sus partes como en su conjunto, determinado y puesto en orden de acuerdo con el Número, por la previsión y el pensamiento de Aquél que creó todas las cosas, pues el modelo estaba fijado, como un bosquejo preliminar, por la dominación del Número preexistente en el espíritu del Dios creador del mundo, Número-Idea, puramente inmaterial en todos sus aspectos y, al mismo tiempo, la verdadera y eterna esencia; de manera que de acuerdo con el Número, como de conformidad, en un plano artístico, fueron creadas todas las cosas, y el tiempo, el movimiento, los cielos, los astros y todos los ciclos de todas las cosas".**

Si tenemos en cuenta que NICÓMACO de GERASA no fue un filosofo, sino un profesor y un ensayista pitagórico como puede serlo cualquier hombre del mundo, tiene que sorprendernos, de una forma muy especial, la profundidad de estos pensamientos. En su continuo afán por descubrir todo lo referente al Número, aprovecha toda su obra INTRODUCCIÓN A LA ARITMÉTICA para transmitirnos sus reflexiones sobre el Número-Científico. Se trata, según él, de : **"Una multitud limitada o una combinación de mónadas"**, o sea de unidades. Sin darse cuenta, está definiendo lo que hoy denominamos como *conjunto enumerable finito*.

En esta época, hace su ingreso, en la ya amplia elite cultural griega, un nuevo personaje llamado TEÓN DE ESMIRNA. Este padre de la cultura, hace la siguiente reflexión sobre el segundo aspecto de la definición dada por NICÓMACO sobre el número: **"Los pitagóricos, consideraban todos los términos de la serie natural de los números como principios; de tal forma que "*tres*" (la triada) es el principio de tres de entre los objetos sensibles, y "*cuatro*" (la tétrada) el principio de los cuatro de entre…, etc…".** Como podemos observar, esta reflexión es casi idéntica a la que llegaría más tarde BERTRAND RUSSELL cuando califica al número como *clase de clases*.

Estas mónadas, estas unidades, a las que nos hemos referido anteriormente, al comentar las reflexiones de NICÓMACO, pueden venir representadas por puntos. En este caso, tiene lugar el nacimiento, a la vez geométrico y algebraico de los *números figurados*, que pueden ser planos (triangulares, cuadrados, pentagonales, etc…) y sólidos (números piramidales, cúbicos, paralelepípedicos, etc…), y que ya estudiaron en Sicilia los componentes de la escuela pitagórica.

Vista la importancia que los padres de la cultura griega daban al concepto de Número, en sus múltiples aspectos y divisiones, vamos a ocuparnos ahora, siguiendo sus propios pasos, del estudio de los vínculos o relaciones que se establecieron entre ellos y que de forma tan importante influyeron y siguen influyendo en el nacimiento y desarrollo de la Expresión Artística.

Para NICÓMACO, la relación entre dos objetos o dos dimensiones constituye una *razón*. A esta razón la considera cualitativa o propiamente dicha en el sentido moderno de la razón-medida como se estudia hoy día en álgebra y en aritmética, donde se trata, como ya sabemos, de dos magnitudes con respecto a la misma unidad. Como todos sabemos, la razón $\frac{a}{b}$ es la medida de la magnitud **a** si tomamos como unidad a la magnitud **b**.

EUCLIDES, cuyos estudios sobre razones y proporciones están basados en los trabajos de EUDOXIO, discípulo de PLATÓN, define la razón diciendo que : **“...es la relación cualitativa en lo que se refiere a la dimensión entre dos magnitudes homogéneas... “**, para concluir diciendo que la proporción **“... no es ni más ni menos que la igualdad de razones .“**

Todo lo anterior, nos conduce a la expresión general de la proporción geométrica discontinua de cuatro magnitudes**:**

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$$

Según nuestros personajes, esta razón $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, comparación de dos magnitudes o de dos números concretos que las miden, **“no es ni más ni menos que la proyección en el plano matemático de la operación elemental del juicio: percepción exacta de las relaciones entre las cosas o las ideas”.**

Como consecuencia de lo anterior, amplían su reflexión y emiten el siguiente axioma: **“La comparación entre dos o más razones, y la percepción de su equivalencia, de su armonía , de su** *analogía*, **operación ya más sintética de la inteligencia, que armoniza y que enlaza diversos juicios o percepciones elementales, tiene también a la expresión de la proporción anterior** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **como proyección esquemática en el plano de los números”.**

Cuando los cuatro términos o magnitudes de una proporción como la anterior son diferentes, la proporción recibe el nombre de **“proporción discontinua”.** En esta proporción geométrica de cuatro términos, del tipo separado o discontinuo, las magnitudes **b** y **c** reciben el nombre de medios, estando situados entre dos términos extremos **a** y **d**. En el caso de que los dos mayores intermedianos **b** y **c** sean iguales, la proporción geométrica anterior recibe el nombre de *proporción continua*.

Como consecuencia de las definiciones anteriores, NICÓMACO hace la siguiente reflexión: **”...siendo la razón una relación entre dos términos o magnitudes, y la proporción una combinación o correlación de dos razones por lo menos, se necesita un número de tres términos o elementos para establecer una proporción”.**

Sin embargo, esta reflexión de NICÓMACO no es del todo cierta. Podemos obtener una proporción continua partiendo solamente de dos magnitudes **a** y **b.** Su suma a + b, nos da la tercera magnitud reclamada por NICÓMACO, obteniendo, como consecuencia, la proporción continua más característica $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ denominada más tarde por los alemanes con el nombre de : **“proporción continua por excelencia”** o DIE STETIGE PROPORTION, basada en la razón de la *sección áurea*. Esta proporción, podríamos definirla como: **“La razón entre la suma de dos magnitudes consideradas y una de ellas (la mayor), es igual a la razón entre esta y la otra (la menor)”.**

Si aplicamos la definición anterior a las longitudes PA y PB en las que queda dividido el segmento AB por un punto P, la proporción anterior tendría la forma:

$$\frac{AB}{PA} = \frac{PA}{PB}$$

con lo que habríamos llegado a lo que EUCLIDES denomina **“división de una longitud en media y extrema razón”**. El segmento mayor PA de los dos en que ha quedado dividida la longitud total AB por el punto P, recibe el nombre de *segmento áureo* o *segmento de oro* de esa longitud AB.

Esta partición, de una longitud en *media y extrema razón*, ha sido considerada, desde los orígenes de nuestra cultura, como la partición asimétrica, tanto geométrica como algebraicamente hablando, más *lógica* y más importante de todas las conocidas, a causa de sus propiedades tanto matemáticas como estéticas.

La importancia que se le dio a esta proporción fue de tal naturaleza que el monje boloñés FRAY LUCA PACCIOLI DI BORGO no dudó en bautizarla con el nombre de *divina proporción*, consagrándole, además, su magnífico tratado *DE DIVINA PROPORTIONE*, ilustrado por su gran amigo LEONARDO DA VINCI; siendo el propio LEONARDO el primero en bautizar, a esta proporción, con el nombre de *sección áurea*.

Si en la proporción ya conocida:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

dividimos sus dos miembros por **b** , resulta:

$\frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{a}{b^2}$; de donde : $b^2(a+b) = a^2 \cdot b$; y por lo tanto $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a+b}{b}$ que podemos poner de la forma: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1$ (1)

Si hacemos que $\frac{a}{b}$ sea igual a x y sustituimos en (1), obtendremos: $x^2 = x + 1$, o lo que es lo mismo: $x^2 - x - 1 = 0$, ecuación de segundo grado que tiene como soluciones los dos valores:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ .$$

Si tomamos la primera solución como valor numérico de la razón ó *número medida*, habremos obtenido la expresión aritmética de la *sección áurea* o *número de oro*.

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$$

Siguiendo las recomendaciones de SIR TH.COOK y MARK BARR, vamos a designar a esta *sección áurea* o *número de oro* por la letra griega ϕ (phi), siendo, por lo tanto, $x = \phi$.

Como consecuencia la ecuación anterior $x^2 = x + 1$, se nos transforma en $\phi^2 = \phi + 1$, si ahora dividimos los dos miembros por ϕ, tenemos: $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, de donde:

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 \ .$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, podemos establecer las tres igualdades siguientes:

$$\phi^2 = \phi + 1 = 1{,}618\ldots.+1 = 2{,}618\ldots.$$

$$\phi = 1{,}618\ldots.$$

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 = 1{,}618\ldots.-1 = 0{,}618\ldots.$$

A partir de la primera se obtendrán, multiplicando indefinidamente por ϕ , todos los términos siguientes:

$\phi^2 = \phi + 1$

$\phi^3 = \phi^2 + \phi$

$\phi^4 = \phi^3 + \phi^2$ (2)

....

$\phi^{n} = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$

Se trata pues, de una progresión geométrica cuya razón es ϕ y que gozará, por consiguiente, de la propiedad ya conocida de que con tres términos consecutivos de una progresión geométrica se puede formar una proporción continua.

Sabemos que : $\frac{\phi^4}{\phi^3} = \phi$, y $\frac{\phi^3}{\phi^2} = \phi$; luego : $\frac{\phi^4}{\phi^3} = \frac{\phi^3}{\phi^2}$, por consiguiente, podemos deducir que un término cualquiera es medio proporcional entre el anterior y el siguiente. Por lo tanto, si tenemos una proporción o progresión geométrica continua a, b, c, podremos escribir que:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$; de donde: $b^2 = a \cdot c$; luego: $b = \sqrt{a \cdot c}$

cumpliéndose, como vemos, la propiedad anterior, y siendo $b = \sqrt{a \cdot c}$ la *media geométrica* o *media proporcional* entre **a** y **c** . Por ejemplo: en la progresión geométrica, 3, 6, 12, … tendremos que : $6^2 = 3 \cdot 12 = 36$ $6 = \sqrt{36}$.

Así mismo, a la vista de las expresiones (2), podemos decir que cada término es igual a la suma de los dos precedentes.

La serie: 1, ϕ , ϕ^2, ϕ^3,….., ϕ^n, cuya razón geométrica es ϕ, tiene a la vez las propiedades multiplicativas y aditivas, es decir, goza de las propiedades de una progresión geométrica y otra aritmética .

Como la ecuación $\phi^{n} = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$ es válida para cualquier tipo de exponentes, podremos escribir que:

$\phi^{0} = \phi^{-1} + \phi^{-2}$, o lo que es lo mismo: $1 = \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2}$.

Como consecuencia, las longitudes proporcionales a los términos de esta serie tendrán propiedades geométricas y gráficas notables: **“Dos longitudes cuya razón sea ϕ permiten construir, con regla y compás, por simples adiciones o sustracciones, la serie geométrica entera”.**

Las definiciones que se han dado antes, se refieren a las proporciones propiamente dichas, o *analogías del tipo geométrico*, basadas sobre la igualdad de dos o más razones, y cuyos elementos son entre sí como los términos de una progresión geométrica cualquiera:

$$1, K, K^2, K^3, \ldots, K^n.$$

Es curioso, como los griegos, entre ellos NICÓMACO, escribían una proporción, no solamente las geométricas continuas sino también las aritméticas o armónicas, bajo la forma de una progresión o de una serie, es decir, hablaban de la proporción: 1, 2, 4, ….., o de la proporción : 1, 3, 9, 27, 81, ….. desempeñando un papel muy importante este concepto de la proporción en sus especulaciones filosóficas y científicas. Esta proporción continua puede ser prolongada en un número indefinido de términos, produciendo, en este caso, la pulsación o el efecto de una progresión geométrica de razón constante.

De una proporción continua podemos deducir la semejanza, basada en la homotecia de las figuras en la geometría, así como la analogía de los planos o de los volúmenes en arquitectura. Pero de la misma forma que el concepto que tenían los griegos de razón o relación numérica estaba más generalizado que el de razón o número-medida propiamente dicho, también la noción de proporción fue a su vez más utilizada por aquellos padres de la cultura. La *analogía* propiamente dicha o la proporción geométrica no era mas que uno de los diez tipos de *correlaciones entre relaciones* que tanto agradan a NICÓMACO y a TEDÓN de Esmirna y que veremos más

adelante.Para NICÓMACO, la proporción no es ni más ni menos que la combinación de dos o más relaciones. Esta reflexión, no quiere decir que tengan que ser iguales dos razones iniciales; entre ellas, siempre podremos observar o considerar alguna diferencia u otro tipo de correlación o de comparación. Lo que si debemos tener muy claro, para todo tipo de proporción o combinaciones de razones, es que el menor número de términos que podemos emplear es el de tres, como ya decíamos anteriormente.

Para los griegos, los tipos de proporciones geométricas más utilizadas eran las siguientes:

- En primer lugar, como hemos visto anteriormente, la del tipo $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, en la que la razón entre el primer término y el término medio, es igual a la razón entre éste y el término extremo. (Como ejemplo de éste tipo de proporción tendríamos: 2, 4, 8)
- En segundo lugar, aquella cuyo término medio excede al primero en una cantidad igual a la que éste es excedido por el último, de suerte que, este término medio o media aritmética, es igual a la semisuma de los extremos: c - b = b - a, o también $b = \frac{a + c}{2}$. (Como ejemplo de este tipo de proporción tendríamos: 2, 4, 6).
- Por último o en tercer lugar, la proporción armónica en la que el término medio excede al primero en una fracción de éste igual a la fracción en que aquel es sobrepasado por el último término: $b - a = a \cdot \frac{c - b}{c}$, o también, si despejamos el término medio, su equivalente $b = \frac{2ac}{a + c}$. (Como ejemplo de este tipo de proporción tendríamos: 6, 8, 12).

Tanto NICÓMACO de Gerasa como TEÓN de Esmirna , utilizaron un método logístico muy elegante para establecer, dadas tres magnitudes, los diez tipos de proporciones más

importantes para ellos. Para lograrlo, aplicaron dos principios muy conocidos: *El principio de lo Mismo y lo Otro* y el *Principio de Economía*.

Como se recordará, hemos aplicado antes estos mismos principios para definir la *sección áurea* partiendo de dos magnitudes.

Es TEÓN de Esmirna el primero que nos pone de manifiesto este procedimiento cuando nos dice: **"Tomaremos así tres magnitudes y las proporciones que residen en ellas, intercambiaremos los términos y demostraremos que toda la materia está constituida por las proporciones entre cantidades, y que su origen y sus elementos se resumen en la esencia de la proporción".**

Estos diez tipos de proporciones obtenidos por TEÓN y escritos bajo la forma de igualdades, con ejemplos numéricos, para cada uno de ellos son los siguientes:

$$\frac{c-b}{b-a}=\frac{c}{c}\quad (1, 2, 3) \qquad \frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{b}\quad (1, 4, 6)$$

$$\frac{c-b}{b-a}=\frac{c}{b}\quad (1, 2, 4) \qquad \frac{c-a}{b-a}=\frac{c}{a}\quad (6, 8, 9)$$

$$\frac{c-b}{b-a}=\frac{c}{a}\quad (2, 3, 6) \qquad \frac{c-a}{c-b}=\frac{c}{a}\quad (6, 7, 9)$$

$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{a}\quad (3, 5, 6) \qquad \frac{c-a}{b-a}=\frac{b}{a}\quad (4, 6, 7)$$

$$\frac{b-a}{c-b}=\frac{b}{a}\quad (2, 4, 5) \qquad \frac{c-a}{c-b}=\frac{b}{a}\quad (3, 5, 8)$$

Por su parte, NICÓMACO emplea el mismo método combinatorio fundado sobre cierto número de transformaciones de la igualdad inicial para establecer los diez tipos de *relaciones funcionales* entre tres magnitudes.

Para este gran personaje, el número diez es, según la doctrina pitagórica, el más perfecto de los posibles números. En sus reflexiones, asegura: **" De acuerdo con esta idea se observaron diez**

tipos de relaciones y de categorías, y parecen aún establecidas las divisiones y las formas de las extremidades de nuestras manos y nuestros pies, y de muchas cosas que citaremos mas adelante". En sus THEOLOGUMENAS, que nos han llegado muy incompletas, este hombre oriundo de Gerasa llama a la Década el todo, **"pues sirve de medida para el todo como una escuadra y una cuerda en manos del Ordenador"**. Pasando ahora de la Década a su mitad, llegamos a una de las personalidades más brillantes de la *Sociedad de los Números*: la Péntada o característica del cinco. En arítmologia o mística del Número, participa, por una parte, de la esencia y la importancia de la Década por su mitad y su imagen condensada, pero es considerada también como el Número de Afrodita, diosa de la unión fecundadora, del Amor generador, arquetipo abstracto de la generación. Cinco es, en efecto, la combinación del primer número par, femenino, matriz (Dos, diada) y el primer número impar, masculino y asimétrico, completo (Tres, triada). La péntada es también el número de la armonía en la salud y la belleza realizadas en el cuerpo humano. Su imagen gráfica, el pentagrama (pentágono estrellado), será pues, a la vez, el símbolo del Amor creador y el de la belleza viva, dando lugar al equilibrio en la salud del cuerpo humano.

Hemos visto anteriormente, que la participación desigual (asimétrica), más sencilla de una magnitud en dos partes, era la que establecía entre la magnitud inicial y sus dos partes, la proporción denominada *sección áurea*.

Si a estas dos partes las denominamos **a** y **b**, (segmentos lineales cuando se trata de una magnitud), hemos deducido anteriormente, al hacer $x = \frac{a}{b}$, que:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$, siendo la raíz negativa de esta ecuación de segúndo grado la inversa de la raíz positiva, como podemos ver:

$$x_1 \cdot x_2 = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1-5}{4} = -1$$

resultando, por lo tanto, que el valor de $\frac{a}{b} = x$, para el valor de x_2 correspondería al caso de a > b, por lo que sólo consideraremos la raíz:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi = 1{,}618\ldots$$

Esta razón que, de acuerdo con SIR.TH.COOK, hemos representado por ϕ, para simplificar la escritura y los cálculos, se encuentra en las figuras geométricas derivadas del pentágono regular (especialmente en el pentágono estrellado) y del decágono regular convexo o estrellado.

Por ejemplo, si en un círculo de radio R se inscriben los pentágonos regulares convexo y estrellado (de lados P_r y P_e), y los decágonos regulares convexo y estrellado (de lados d_r y d_e), podremos escribir:

$$\frac{P_e}{P_r} = \frac{d_e}{R} = \frac{R}{d_r} = \phi \qquad (1)$$

Esta razón ϕ domina todas las proporciones de las figuras así obtenidas, y trazando a partir de un pentágono inicial series crecientes o decrecientes de pentagramas concéntricos, se obtienen gráficamente series ϕ lineales indefinidas.

Recordemos que el lado del hexágono regular inscrito en el círculo es igual al radio R de ese círculo. (Esta es la razón principal para la primacía de la simetría hexagonal en las equiparticiones isótropas, cristalinas del espacio).

Por aplicación explícita de la *sección áurea*, cuya construcción rigurosa ha sido divulgada desde EUCLIDES, el gran maestro CLAUDIO PTOLOMEO resolvió, en su ALGESTO, los problemas gráficos referentes a encontrar los lados del pentágono y del decágono regulares inscritos en un circulo dado, al igual que hicieron otros famosos padres de la cultura reconocidos e incansables investigadores de estos temas.

En la LAMINA-1, podemos observar las siguientes construcciones:

1.1.- Obtención del *segmento áureo* de una longitud dada.

1.2.- *Razón áurea* expresada en (1), resultante de los trazados conexos del pentágono regular y del pentágono estrellado, así como del decágono regular y decágono estrellado.

1.3.- Rectángulo áureo.

1.4.- Pentagrama completo, constituido por cinco triángulos isósceles *sublimes* entrelazados, cuyo ángulo en el vértice es de 36º.

1.5.- Triángulo rectángulo áureo, en el que el cateto AC es *segmento áureo* de la hipotenusa AB.

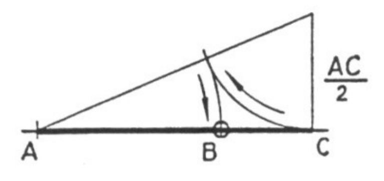
1.6.- Construcción del pentágono y del decágono regulares según EUCLIDES.

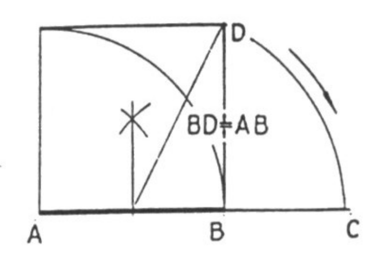
Por último, podemos admirar la construcción del pentágono según los métodos seguidos por PTOLOMEO (1.7.), DURERO (1.8.), e HIPÓCRATES (1.9.).

Por otro lado, y teniendo en cuenta que el dodecaedro, (poliedro formado por 12 caras pentagonales, 30 aristas y 20 vértices) y el icosaedro,(poliedro formado por 20 caras triangulares, 30 aristas y 12 vértices), son la ampliación en el espacio del pentágono regular, no podemos extrañarnos al encontrar la *sección áurea* como razón principal que domina tanto las proporciones lineales, planas o sólidas del interior de estos dos cuerpos, como las proporciones que unen entre sí al dodecaedro y al icosaedro inscritos en la misma esfera o en el mismo cubo.

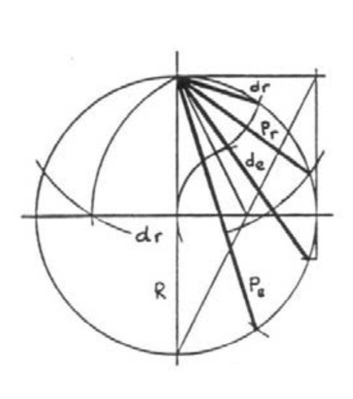
Si nos fijamos atentamente en un dodecaedro, podemos observar que los 20 vértices de este poliedro son los correspondientes a cuatro pentágonos regulares iguales de dos en dos y situados en planos paralelos, siendo igual a ϕ la razón entre la longitud de los lados de los grandes y pequeños pentágonos (dodecaedro no regular), lo mismo que las razones entre las distancias respectivas de los cuatro planos. Igualmente, nos daremos cuenta de que los 12 vértices del icosaedro coinciden con los de tres rectángulos de módulo ϕ, perpendiculares entre sí. Además, si observamos detenidamente estos dos poliedros, nos daremos cuenta de que uniendo los centros de las caras de uno de ellos, obtenemos el otro.

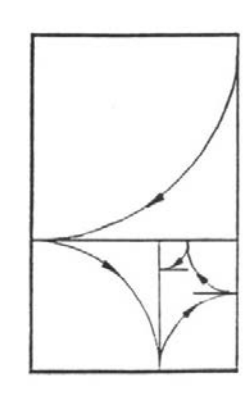
LÁMINA 1

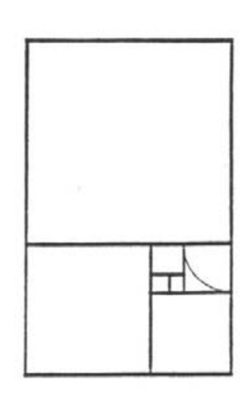




1.1. Sección áurea

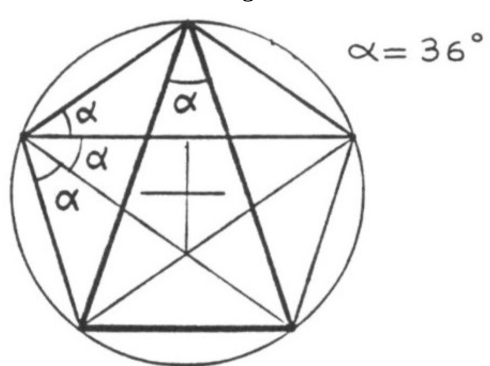


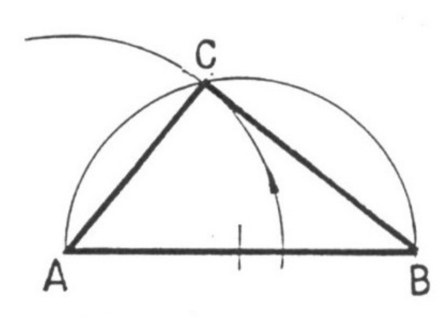




1.2. Pentágono

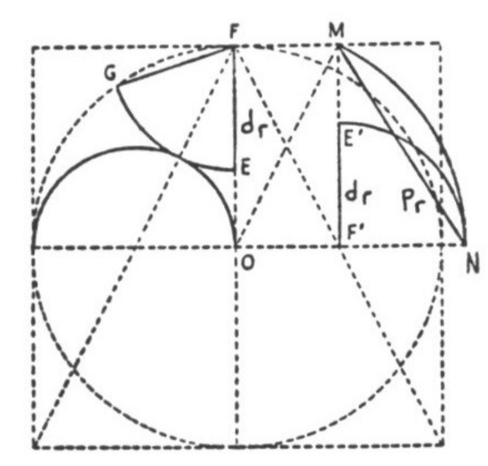
1.3. Rectángulo ϕ



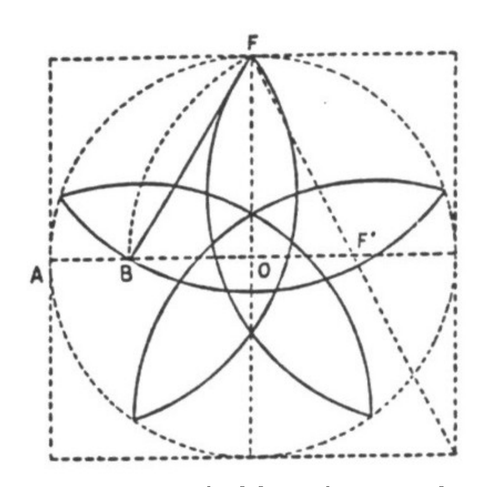


1.4. Pentagrama

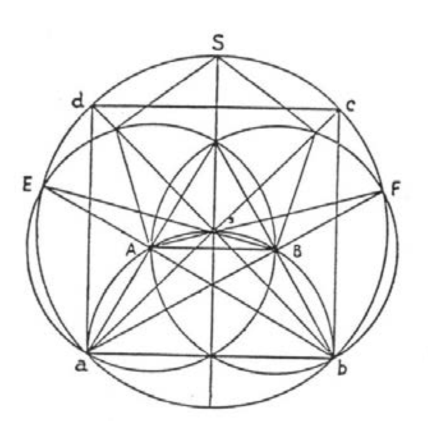
1.5. Triángulo (AC es segmento áureo de AB)



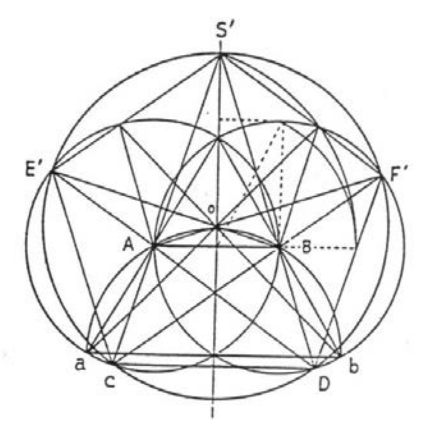
1.6. Construcción de Pentágono
y del decágono regulares según Euclides.



1.7. Construcción del Pentágono regular
Según Ptolomeo.



1.8. Solución según Durero.



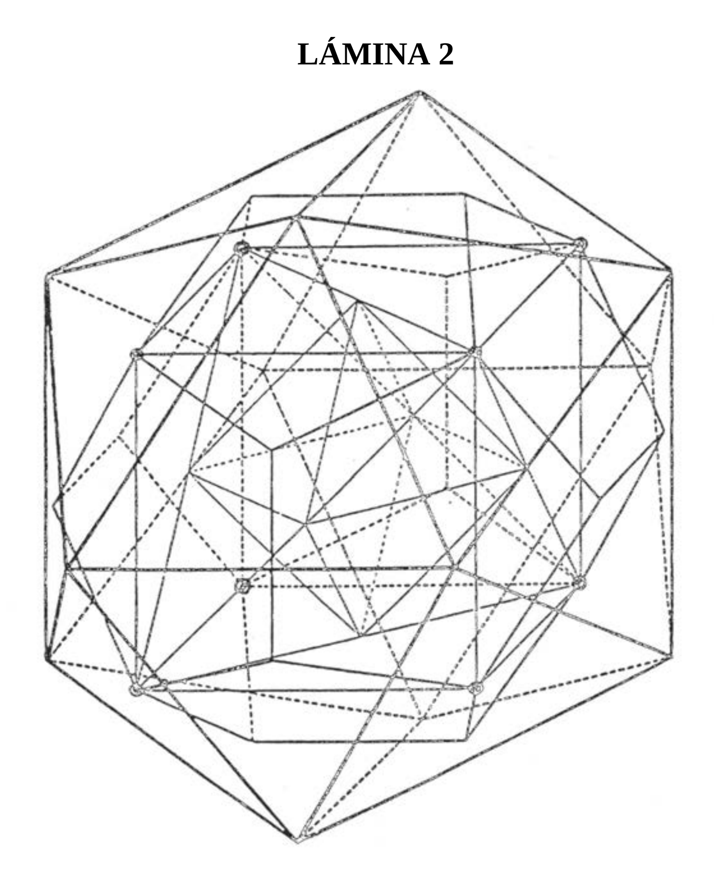
1.9. Solución según Hipócrates.

Llegamos por lo tanto a la conclusión de que, al igual que el octaedro y el cubo, también el dodecaedro y el icosaedro son recíprocos. Al mismo tiempo, y abundando en lo anterior, los padres de la cultura griega, dieron a conocer sus propias teorías sobre la simetría y las proporciones; según ellos, las figuras contenidas en un plano, como el triángulo, el cuadrado o el pentágono, no pueden

transformarse ni reducirse; sin embargo, en el espacio, se puede pasar del dodecaedro o del icosaedro al cubo y de este al tetraedro.

Si dirigimos nuestra atención y observamos con detenimiento el dibujo siguiente (1.10.), reflejado en la LAMINA-2, distinguiremos las siguientes combinaciones: los 12 vértices del icosaedro, y seis de sus aristas, se encuentran en la superficie de un cubo; los 8 vértices de este cubo coinciden a su vez con 8 vértices de un dodecaedro que tiene una arista igual a la del icosaedro . Los otros 12 vértices del dodecaedro y seis de sus aristas, se encuentran sobre la superficie de otro cubo concéntrico y envuelven al conjunto, de tal forma que la longitud de su arista y la de la arista del primer cubo están en la relación ϕ.

LÁMINA 2

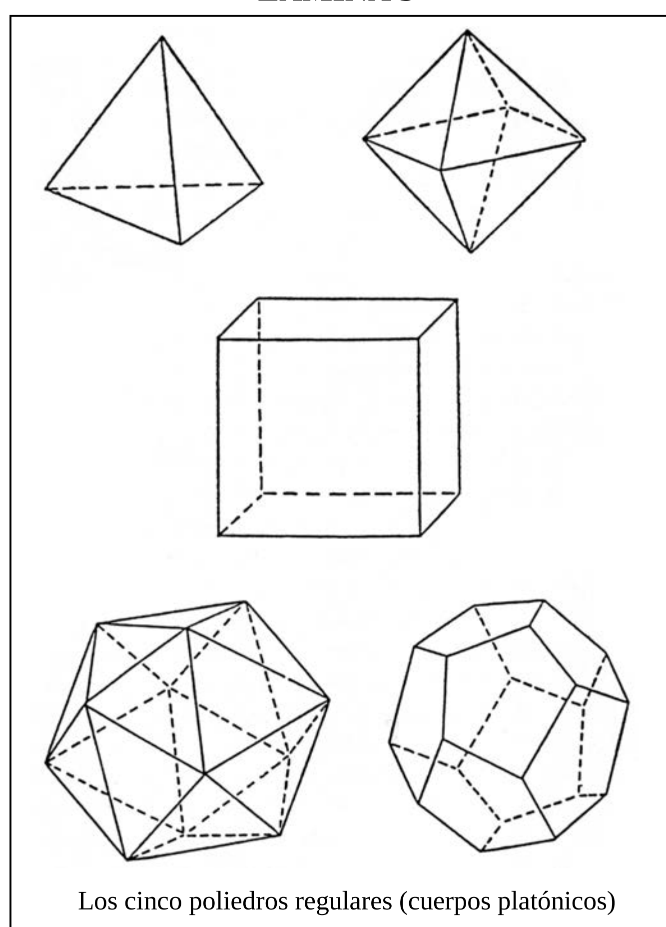


1.10. Los cinco cuerpos platónicos inscritos uno dentro del otro (D. Wiener)

De la misma forma, las 6 aristas de todo tetraedro, pueden colocarse como diagonales sobre las 6 caras del cubo, y los 4 vértices del tetraedro coinciden con 4 de los vértices del cubo, constituyendo un segundo tetraedro los 4 vértices restantes y las otras 6 diagonales.

Todo lo anterior, nos permite asegurar y comprobar el papel que juega la *sección áurea* como factor armónico entre los cinco cuerpos platónicos. (LAMINA-3).

LÁMINA 3



Los cinco poliedros regulares (cuerpos platónicos)

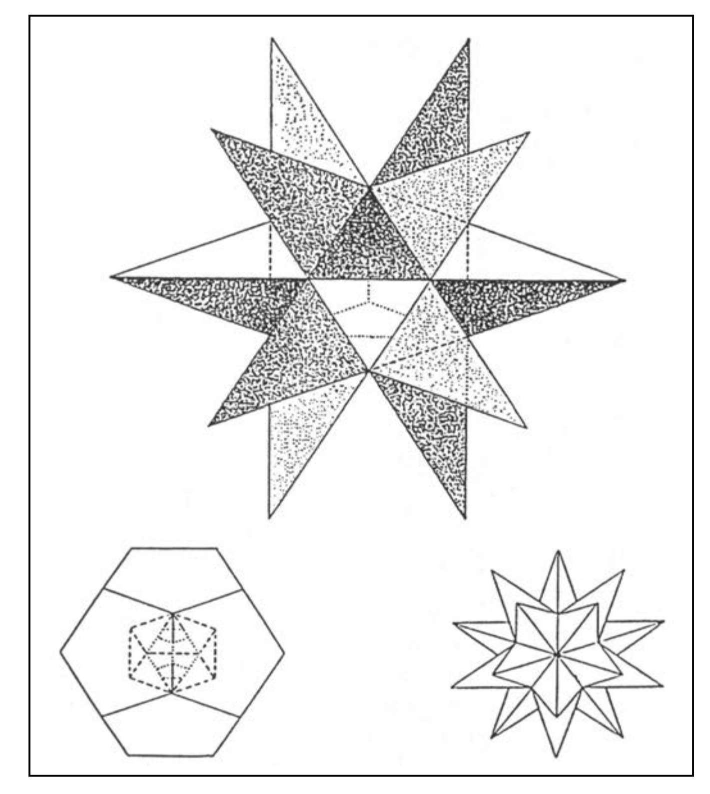
Idéntico razonamiento seguiríamos si nuestra observación se aplica a los dodecaedros estrellados que se obtienen prolongando las caras, o las aristas, del dodecaedro o del icosaedro, y que constituyen entre ambos la ampliación del pentagrama en tres dimensiones. Como consecuencia, todo trazado o toda proyección que represente a estos cuerpos, aislados o combinados, necesitará siempre la partición inicial de un segmento según la *sección áurea*.

Así como en el plano existen infinitos polígonos regulares convexos y estrellados, en el espacio de tres dimensiones solo hay cinco cuerpos regulares convexos, los cinco cuerpos platónicos, y dos poliedros regulares estrellados continuos que son, como ya sabemos, los dos dodecaedros estrellados.

El dodecaedro estrellado del primer tipo, (1.11.), representado en la LAMINA-4, se obtiene prolongando las caras o las aristas de un icosaedro *núcleo*, coincidiendo, las 20 puntas de la estrella sólida resultante con los vértices de un dodecaedro convexo envolvente.

La obtención del dodecaedro estrellado del segundo tipo, (1.12.), representado en la LAMINA-5, se reduce a prolongar las caras o las aristas de un dodecaedro *núcleo,* coincidiendo las 12 puntas de la estrella resultante con los vértices de un icosaedro. Hay autores que denominan *icosaedro estrellado,* a esta estrella del segundo tipo, sin embargo, el hecho de que cada uno de ellos esté constituido por la combinación de 12 caras planas que se cortan en el espacio, da lugar a que se adopte la denominación común de *dodecaedro estrellado* para los dos cuerpos.

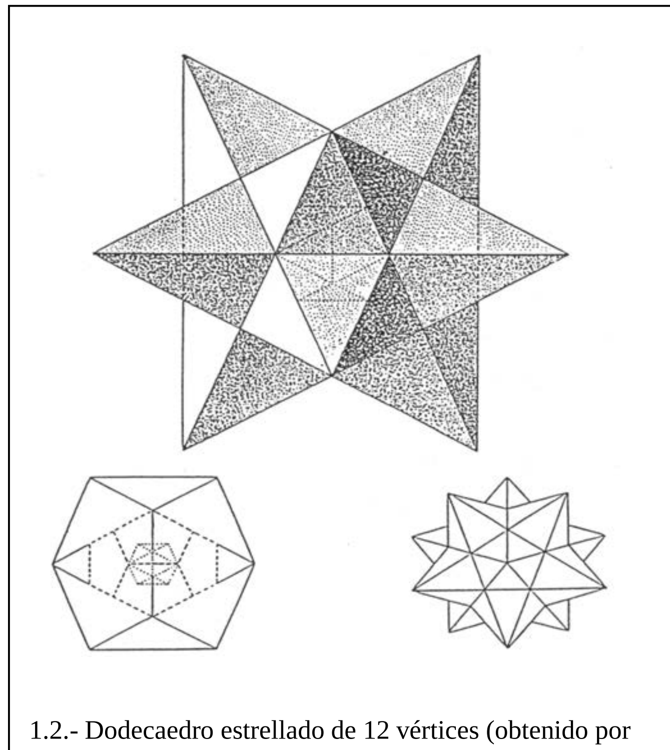
LÁMINA 4



En estas generaciones recíprocas y continuas que brotan a partir del *núcleo* y en las que el crecimiento de los radios, de las superficies y de los volúmenes está regido en progresión geométrica por el ritmo de la *sección áurea*, tenemos el arquetipo ideal del crecimiento dinámico. La figura 1.10., de la LAMINA-2, nos indica el ajuste estático de los cinco cuerpos platónicos encajados unos en otros, relacionados por las simples correspon-dencias morfológicas.

1.11. Dodecaedro estrellado de 20 vértices (obtenido por dos pulsaciones polares
a partir de un icosaedro núcleo).

LÁMINA 5



1.2.- Dodecaedro estrellado de 12 vértices (obtenido por dos pulsaciones polares a partir de un icosaedro núcleo).

La gran obsesión de los maestros griegos por la nivelación, por el equilibrio y por la equipartición de la energía, les conduce, como consecuencia, a la simetría y a la equipartición del plano y del espacio. Las simetrías cuadradas y hexagonales ocupan el primer lugar, debido a que los únicos polígonos regulares que pueden llenar el plano, sin intersticios, son el cuadrado, el triángulo equilátero y el hexágono. Esta afirmación, está basada en la condición o necesidad de que en cada vértice de unión, la suma de los ángulos iguales tiene que ser de 360º, y los únicos ángulos, menores de 360º, que suman este valor son los de 60º, los de 90º y los de 120º.

En la LAMINA-6 podemos observar lo dicho anteriormente:

1.13.- Estructuras planas que cubren el plano.

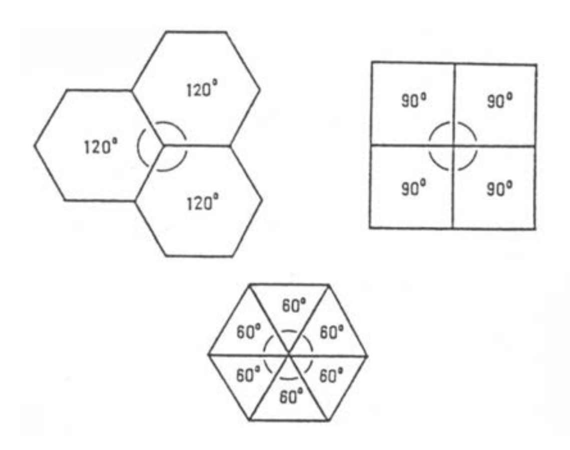
1.14.- Equiparación regular hexagonal del plano.

1.15.- Cristal de nieve, como ejemplo de simetría hexagonal.

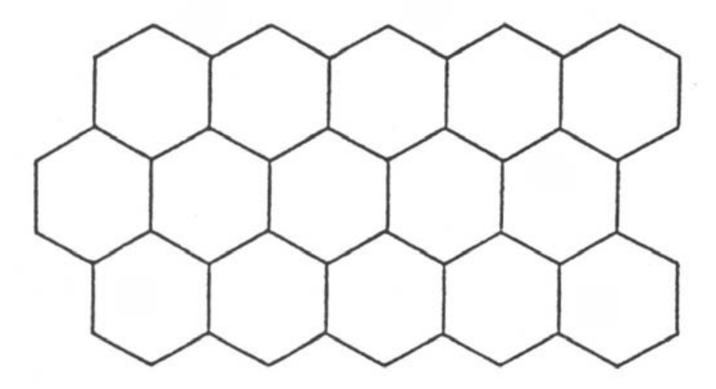
En la LAMINA-7, podemos observar el icosaedro y el dodecaedro dibujados por LEONARDO DA VINCI para ilustrar la famosa obra de su amigo FRAY LUCA PACCIOLI DI BORGO ya mencionada anteriormente. (1.16.).

Igualmente, en la LAMINA-8, hemos representado poliedros semirregulares imaginarios y dibujados, así mismo, por LEONARDO DA VINCI (1.17), así, como su versión del dodecaedro estrellado y de la *stella octángula* (1.18).

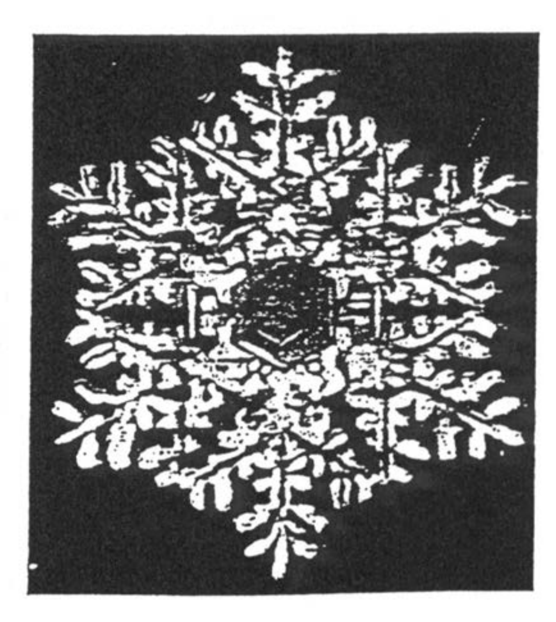
LÁMINA 6



1.13.- Estructuras llanas que cubren el piano.



1.14.- Equipartición regular hexagonal del plano.



1.15.- Cristal de nieve simetría hexagonal.

Si observamos los poliedros regulares, nos daremos cuenta de que el único que puede llenar el espacio, por su repetición, es el cubo. Por lo tanto, aparece otra vez la diferencia importante entre la simetría hexagonal que va unida al equilibrio inactivo y la simetría pentagonal que introduce tanto en el plano, donde la prolongación de las líneas del pentágono engendra pentagramas cuyas dimensiones aumentan en progresión geométrica, como en el espacio, generación de los poliedros estrellados alternados a partir de un *núcleo* dodecaédrico; una pulsación o un efecto en progresión geométrica que corresponde a un crecimiento perfectamente homotético, como consecuencia de que toda transformación en razón geométrica se puede considerar como la huella esquemática de una espiral logarítmica, que es la curva por excelencia de crecimiento homotético.

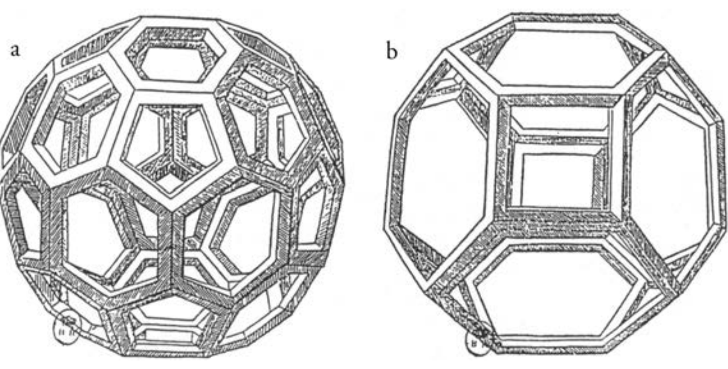
LÁMINA 7

1.16. a) Icosaedro dibujado por Leonardo da Vinci para De Divina Proportione, de Fra Luca Paccioli.
b) Dodecaedro dibujado por Leonardo da Vinci para De Divina Proportione de Fra Luca Paccioli.

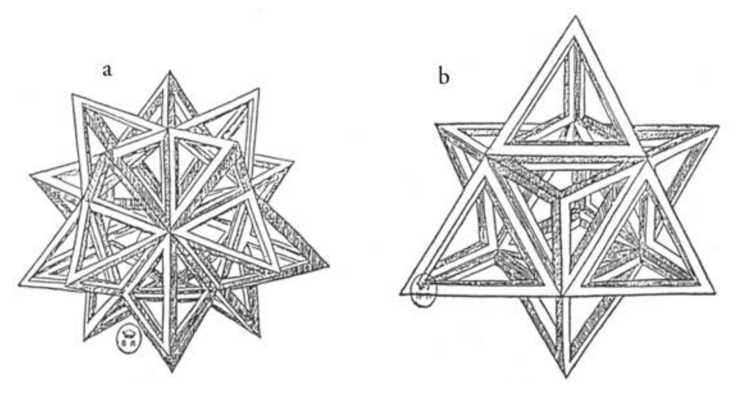
Como entre todos los crecimientos homotéticos, el que resuelve el problema de ser a la vez aditivo y geométrico está regido por la espiral de pulsación cuadrantal ϕ y el rectángulo director de módulo ϕ (ya que la serie ϕ es la única serie aditiva de dos tiempos que sea a la vez una progresión geométrica, es decir una sucesión continua de proporciones), y como esta razón es la característica de las simetrías y crecimientos pentagonales, tenemos una razón adicional para la presencia de formas y simetrías pentagonales en los organismos vivos.

La pulsación cuadrantal de una espiral logarítmica es la razón constante entre las longitudes de dos radios perpendiculares consecutivos, siendo suficiente para caracterizar la espiral. Prolongando uno de estos radios del otro lado del polo hasta su intersección con la voluta de la espiral se obtiene un tercer punto de la curva que da el tercer vértice del rectángulo director, aquel cuyo módulo, razón entre el lado mayor y el menor, es igual a la pulsación cuadramental. Del mismo modo, a todo rectángulo corresponde una espiral logarítmica que pasa por tres de sus vértices.

LÁMINA 8



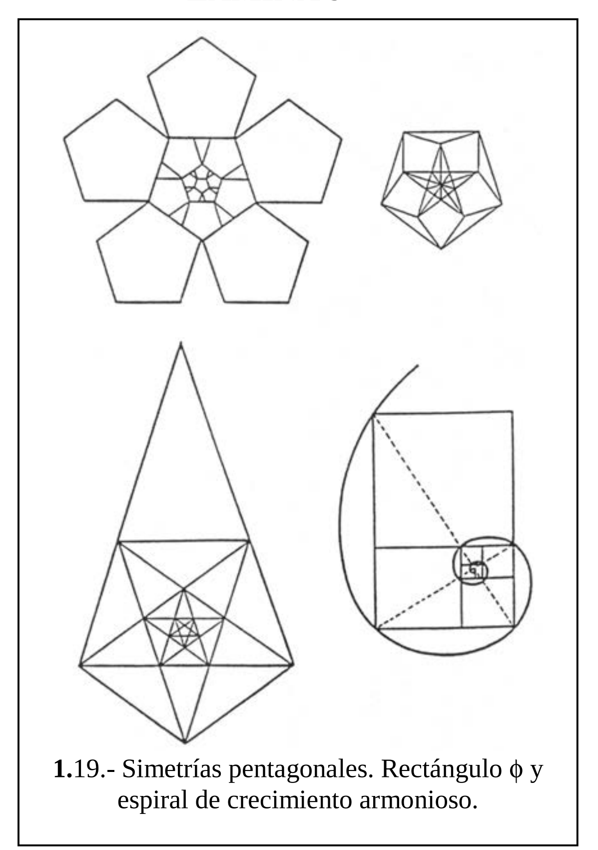
1.17. a) y b) Poliedros semiregulares por Leonardo da Vinci.



1.18.- a) Dodecaedro estrellado, por Leonardo da Vinci. b) Stella octángula por Leonardo da Vinci.

En la LAMINA-9, podemos observar ejemplos de simetrías pentagonales, *rectángulo áureo* y espiral de crecimiento armonioso (1.19).

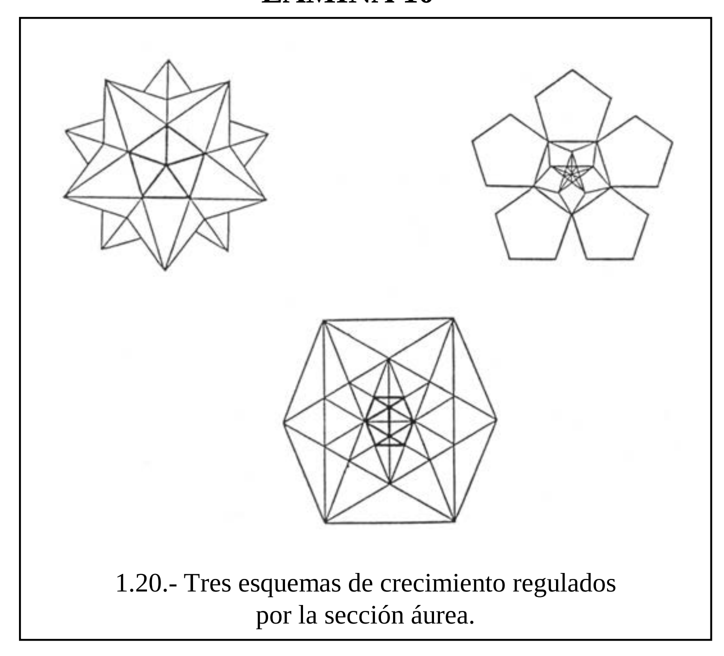
LÁMINA 9



1.19.- Simetrías pentagonales. Rectángulo ϕ y espiral de crecimiento armonioso.

Igualmente, en la LAMINA-10, tenemos tres esquemas de crecimiento regulados por la *sección áurea* (1.20).

LÁMINA 10



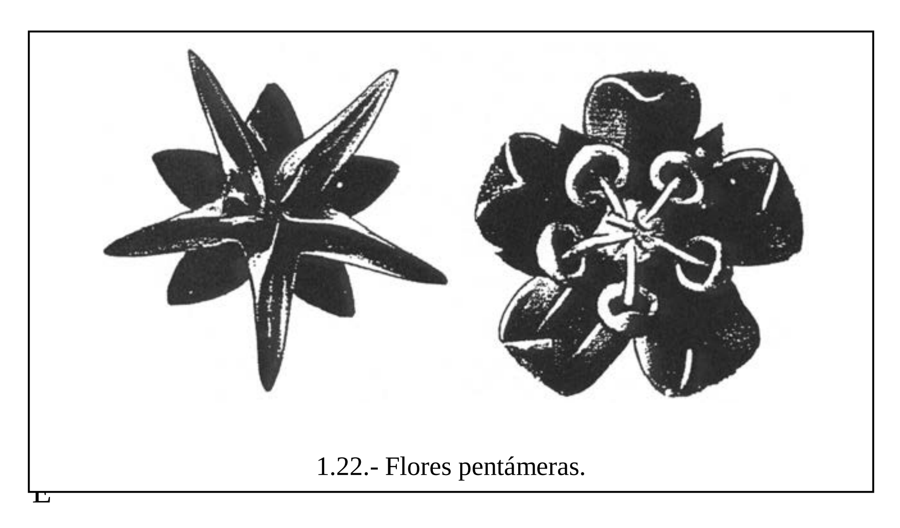
1.20.- Tres esquemas de crecimiento regulados por la sección áurea.

Entre los crecimientos regulados por la *sección áurea* se encuentran no sólo elementos de segmentos y superficies proporcionales a los términos de la serie ϕ, como en las proporciones del cuerpo humano, sino también, y especialmente en botánica (por ejemplo, en la filotaxia que estudia la disposición de las ramas, de las hojas o de las semillas), aparecen los números de la sucesión de FIBONACCI, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ….., que son bastante aproximados a términos enteros de la serie ϕ. Estos números, llamados de FIBONACCI, se obtienen empezando con las cifras 0 y 1, sumando cada vez los dos números anteriores. Así $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$,

2 + 3 = 5 , 3 + 5 = 8 , 5 + 8 = 13 , …..etc. Dividiendo cada uno por el anterior, se obtienen valores que se aproximan cada vez más al valor de ϕ. Como decíamos anteriormente, estos números de FIBONACCI se encuentran a menudo en la naturaleza. Aparecen en la ordenación de las hojas en las ramas, en las espirales de los caracoles e incluso en la reproducción de los conejos.

LÁMINA 11

1.21. Cáliz pentámero (Symphytum officinale).



1.22.- Flores pentámeras.

En la LAMINA-11, podemos observar como la *razón áurea* es la razón característica de las simetrías y crecimientos pentagonales, contando con la presencia de formas y simetrías pentagonales en los seres vivos. (1.21. y 1.22).

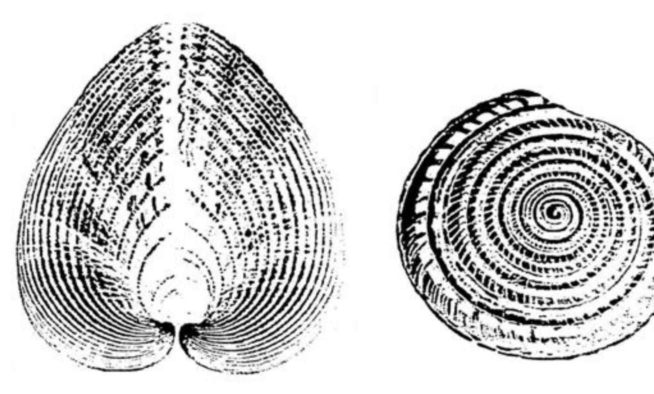
Igualmente, en las figuras representadas en la LAMINA-12, podemos observar como la *sección áurea*, traducida a las proporciones que dan lugar a los números de FIBONACCI, aparece también en las espirales de los caracoles como podemos observar en la figura 1.19 de la LÁMINA-9, en la que apreciamos el rectángulo ϕ y la espiral de crecimiento armonioso.

Como podemos deducir fácilmente, esta sucesión de FIBONACCI corresponde al décimo y último tipo de las proporciones enumeradas por NICÓMACO y TEÓN de ESMIRNA. Se trata de

aquel tipo cuya ecuación era: $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$. De ella se deduce, en efecto, que: c = a + b; lo que nos da, partiendo de a = 1, la sucesión de FIBONACCI.

Hemos visto anteriormente, que los cuatro últimos tipos de proporción y desde luego en forma muy especial el 10º, del que acabamos de ocuparnos, fueron deducidos y divulgados por los neopitagóricos de la escuela de Alejandría. Por lo tanto está claro el importante lugar que ocupaban los números y trazados geométricos relacionados con la *sección áurea* en la mística pitagórica. El papel de la *sección áurea* en las proporciones de las construcciones o proyecciones relativas a la inscripción de los cinco cuerpos platónicos en la esfera no fue olvidado en la Edad Media , autores como CAMPANO (siglo XIII) y LUCA PACCIOLI DIBORGO (1.509), nos transmiten, continuamente en sus tratados, la importancia de la *sección áurea* en todo tipo de expresión artística.

LÁMINA 12



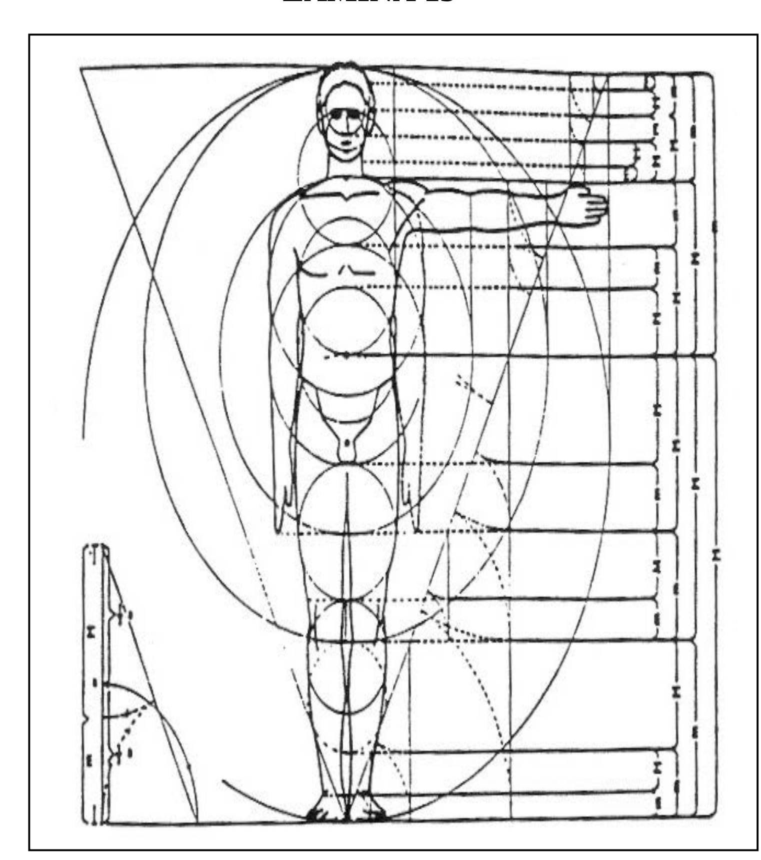
1.23.- Cardium Pseudolima. 1.24.- Solarium Perspectivum

Para KEPLER, la *sección áurea* es una de las dos joyas de la geometría, siendo la otra el teorema de PITAGORAS sobre el cuadrado de la hipotenusa. Después de alcanzar un gran esplendor, la *sección áurea* fue completamente olvidada. Tiene que llegar el alemán ZEYSING (1.850) para descubrirla de nuevo y ponerla de relieve como principio morfológico directivo. En sus

AESTETISCHE FORSCHUNGEN, publicados en 1.855 proclama: ***Para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor la misma razón que entre la mayor y el todo.***

Profundizando en esta misma reflexión, llega a la conclusión de que: "En las estatuas griegas y en los hombres perfectamente proporcionados, el ombligo divide su altura total según la *sección áurea*. Esta composición, que está de acuerdo con las teorías muy divulgadas de DURERO y de LEONARDO, ha sido hecha nuevamente en las estatuas griegas de la época de FIDIAS (1.25).

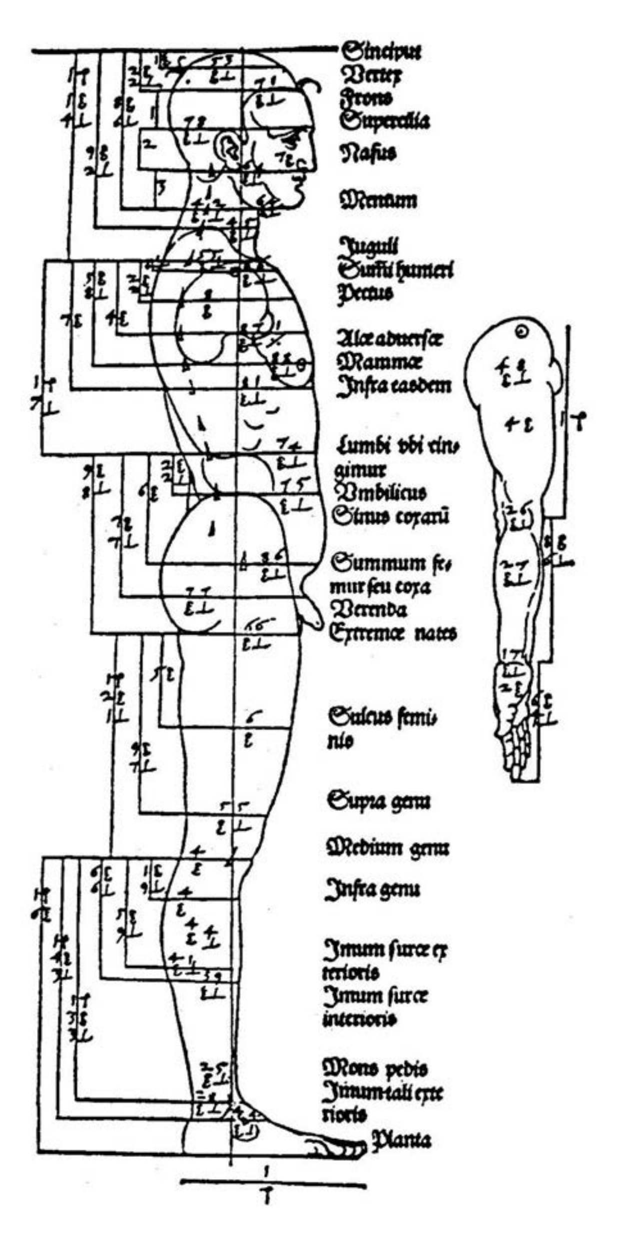
LÁMINA 13



1.25.- Figura humana basada en la obra de Zeysing. El análisis por medio de las secciones áureas encubre la serie ϕ. (De "arte de proyectar en Arquitectura", Neufert).

Así mismo, emite el siguiente juicio: "En el dedo índice de la mano del hombre aparece la sucesión de tres términos consecutivos de una serie decreciente; esta *tríada* es muy importante pues, por el hecho de que su término mayor sea igual a la suma de los otros dos, vuelve a aparecer la dualidad, la partición simétrica de la que era (la *razón áurea*), su contradicción a priori…"

LÁMINA 14



1.26. Figura humana, por Durero. Utilización por Durero de la escala aritmética

En la figura 1.26 podemos observar la figura humana después de que DURERO utilizase la escala *aritmética.*

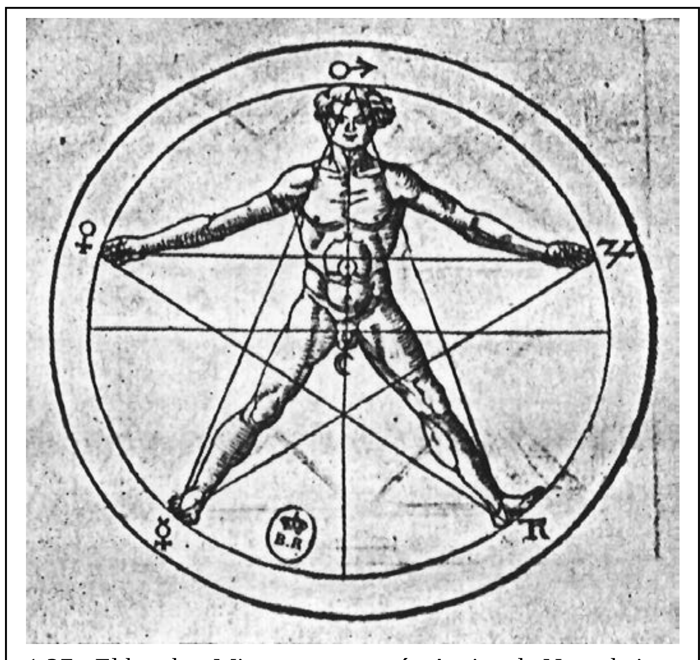
El papel de la *sección áurea* en los trazados arquitectónicos egipcios, griegos y góticos es muy importante. No sólo es el resultado de la presencia de estos esquemas, de decágonos y de pentágonos inscritos en el círculo de orientación, o aún del empleo consciente de volúmenes y de proporciones que resultan de la inscripción del icosaedro o del dodecaedro en la esfera, sino también del hecho de que, durante la gran época de la arquitectura griega, el cuerpo humano fue considerado como el ejemplo vivo más perfecto de simetría y de euritmia (combinación armónica de proporciones), debiendo servir de arquitecto de inspiración, además de modelo para la composición de trazados.

VITRUVIO, cuya obra es una exposición reiterada de la vieja tradición de la arquitectura griega, insiste con mucha frecuencia sobre ella. Cuando trata de las columnas arquitectónicas, compara las proporciones de la columna dórica (módulo de $\frac{6}{1}$ entre la altura y el diámetro medio), a las del cuerpo masculino; las proporciones de las columnas jónicas (módulo $\frac{8}{1}$ entre la altura y el diámetro medio), evocarán el cuerpo gracioso de la mujer; y, por último, las proporciones de las columnas corintias los cuerpos esbeltos de las vírgenes.

Esta teoría, sólo es la transposición al dominio de la forma geométrica del concepto de las correspondencias entre el Macrocosmo (Universo) y el Microcosmo (el hombre), cuya versión metafísica nos ofrece el TIMEO, mostrándonos un triple juego de correspondencias entre el cuerpo humano, el alma humana y el *Alma del Mundo.*

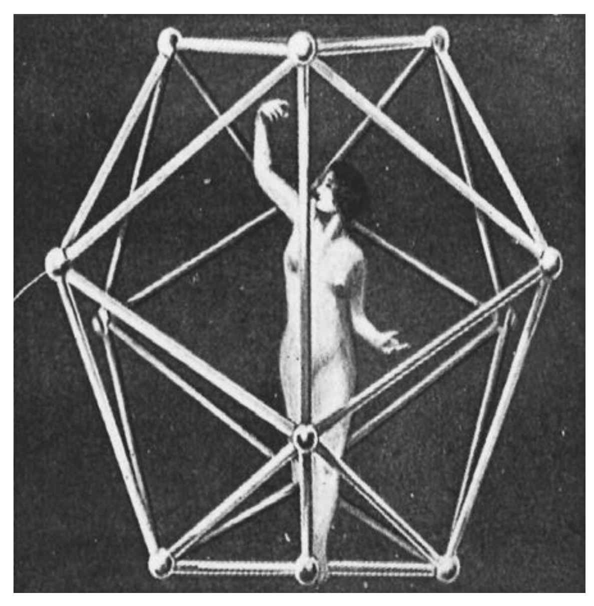
La más conocida representación del hombre, Microcosmo, con las piernas y los brazos separados, completando, con la cima de la cabeza, los cinco puntos del pentagrama es la de AGRIPA DE NETTESHEIM en su tratado: DE OCULTA PHILOSOPHIA (1.27).

LÁMINA 15

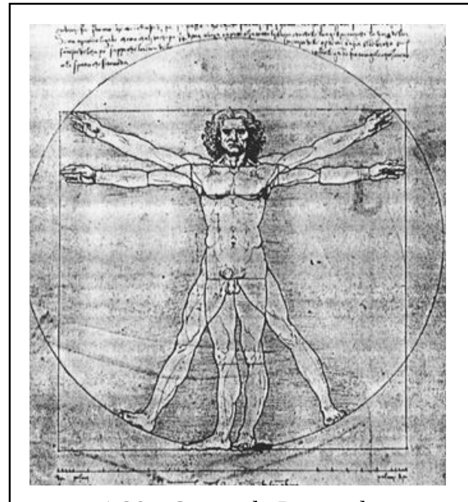


1.27.- El hombre Microcosmo, según Agripa de Nettesheim.

LÁMINA 16



1.28. Elicosaedro director en la enseñanza coreográfica de R. von Laban.

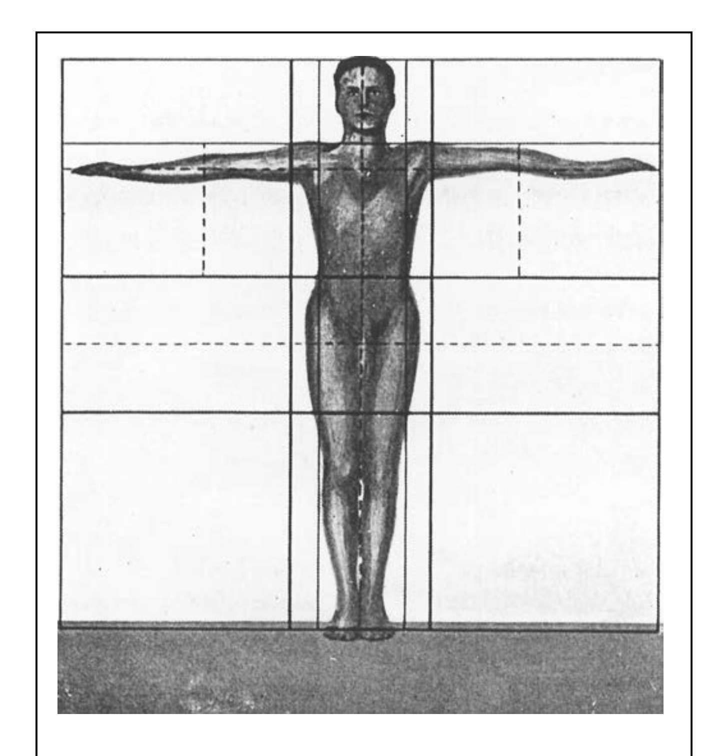


1.29.- Canon de Leonardo

.

RUDOLF VON LABAN, director de uno de los más famosos institutos alemanes de coreografía rítmica, llega a la conclusión, después de largos periodos de observación, de que todos los movimientos del cuerpo del bailarín (en las tres dimensiones), producen desplazamientos angulares extremos de 72º, y que las diferentes direcciones en el espacio, que corresponden a estos desplazamientos, se pueden representar por los radios de un icosaedro circunscrito (1.28).

LÁMINA 17



1.30. Desnudo masculino. Análisis armónico (cuadrado y sección áurea).

Igualmente, LEONARDO DA VINCI estableció su propio canon, sobre las proporciones humanas, regido por la *sección áurea* (1.29).

En la figura 1.30, podemos observar un riguroso canon de las proporciones humanas que tiene como principal protagonista a la *sección áurea* y que está de acuerdo con las ideas de ZEYSING, SR. TH. COOK Y HAMBIDGE. La condición a la que llegó HAMBIDGE, es de que se trata de un tema individual, propio de cada esqueleto, y que ha sido obtenido analizando no solo las proporciones lineales sino también las superficies, a las que descomponía en rectángulos armónicos siguiendo el mismo procedimiento del que siempre se servía para realizar sus análisis armónicos de los templos y de los utensilios griegos.

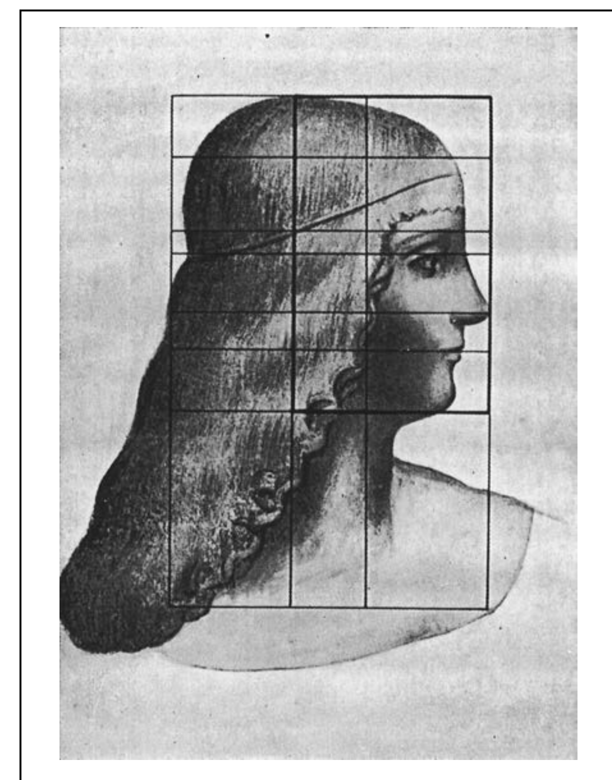
De diversos pasajes de VITRUVIO se desprende claramente que los pintores y escultores griegos habían estudiado con mucho detenimiento las proporciones del cuerpo humano y que, lo mismo que los arquitectos, no se habían conformado con un canon aritmético, sino que aplicaron lo que VITRUVIO llama, por oposición a la *simetría aritmética* o estática obtenida por una simple escala de coeficientes enteros o fraccionarios, la *simetría geométrica*, es decir, el ajuste de las proporciones, por medio de un método gráfico, de las superficies cuyas dimensiones lineales pueden presentar razones irracionales *conmensurables en potencia*, según la expresión de PLATÓN en el TEÉTETO.

Es a HAMBIDGE a quien corresponde el mérito de haber encontrado una clave enteramente satisfactoria para esta conmensurabilidad en potencia, *simetría dinámica,* de PLATÓN, al identificarla con la *simetría geométrica* de VITRUVIO. La palabra *geométrica* tiene aquí la misma acepción que en la expresión *proporción geométrica* o *media geométrica.* Se trata de la analogía o proporción geométrica continua y de las *proporciones irracionales* , como la *sección áurea*, aplicada a las superficies y a los volúmenes. Este tratamiento gráfico constituía, precisamente, uno de los secretos matemáticos de los pitagóricos.

Es posible que, para las proporciones del cuerpo humano, los escultores y pintores griegos estableciesen las siguientes normas:



LÁMINA 18



1.31. Isabel de Este, por Leonardo da Vinci.

1.- Un canon ***aritmético*** práctico, de coeficientes aritméticos enteros o fraccionarios, cuyos elementos encontramos en VITRUVIO y que es transmitirdo hasta nuestros días por PACCIOLI, LEONARDO y los pintores-geómetras del primer Renacimiento.

2.- Un canon ***geométrico*** ideal basado en la *sección áurea*. En este canon ideal, la altura del ombligo divide exactamente la altura total del cuerpo humano según la *sección áurea*. La misma proporción está determinada por el nivel de la extremidad de los medianos cuando los brazos caen verticalmente. Igualmente, se obtiene la razón ϕ entre las distancias de otras partes del cuerpo humano.

3. Un método gráfico que permite modular variantes del canon ideal, sirviéndose, probable-

mente, de procedimientos idénticos o análogos a los que HAMBIDGE para la composición o descomposición armónica de las superficies y de los volúmenes.

LÁMINA 19


1.32.- Miss Helen Wills (Mrs. Moody).

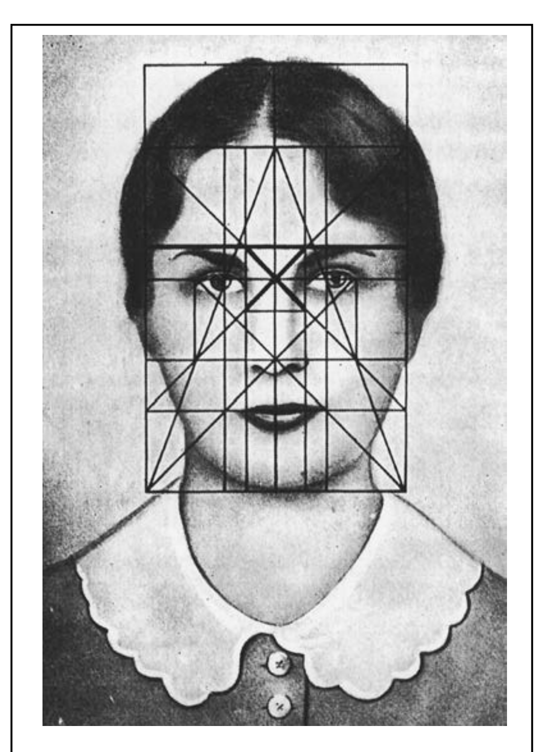
En la figura 1.31, mostramos el perfil de Isabel de Este dibujada por LEONARDO DA VINCI en la época en que su amigo LUCA PACCIOLI, el monje boloñés, daba en la corte de LUDOVICO EL MORO, duque de Milán, sus conferencias sobre la DIVINA PROPORCIÓN, ilustrada, como ya sabemos, por LEONARDO. En la figura 1.32, mostramos la fotografía de la campeona olímpica de tenis, miss HELEN WILLS. Como podemos observar, la figura 1.33, tiene la doble particularidad de mostrarnos no solamente un tema emparentado con la *sección áurea*, sino un canon ideal, modulado rigurosamente por esta. En la figura 1.34, podemos apreciar la explicaciones del diagrama que se ha llevado a efecto en la figura 1.33. No es difícil encontrar, tanto en los *microcosmos* vivos de las figuras 1.27 y 1.35, como en los rasgos de la campeona olímpica de tenis, las teorías platónicas resultantes de la inscripción, en la esfera, de los poliedros regulares y de la generación o multiplicación alternada de los poliedros estrellados a partir del dodecaedro, núcleo envolvente o dodecaedro del TIMEO, verdadero paradigma o modelo de la armonía del *Cosmos.*

Todos los esquemas a los que nos hemos referido anteriormente, vamos a encontrarlos, así mismo, en los trazados de templos que van a ser objeto de nuestro análisis más adelante.

Entre los diversos sistemas de ajuste proporcional que se utilizaron por los estudiosos de esta materia, para descifrar la compleja geometría de las arquitecturas griega y egipcia, vamos a referirmos, en este apartado, a los expuestos por tres grandes personalidades que dedicaron toda su

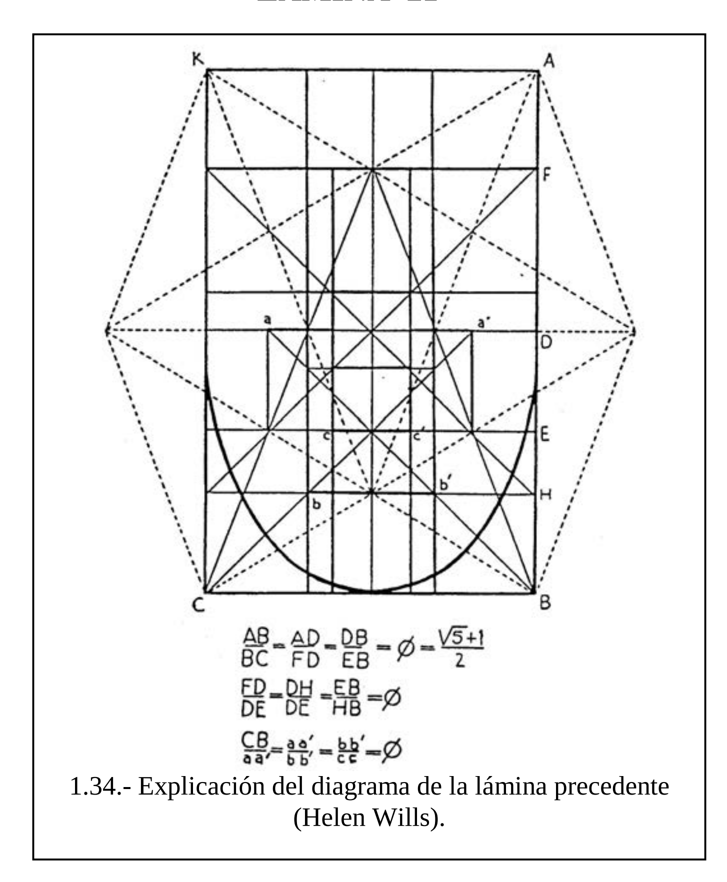
vida al estudio de las proporciones de los edificios clásicos así como a la de los utensilios y recipientes antiguos.

LÁMINA 20



1.33.- Análisis armónico de la fotografía precedente (sección áurea rigurosa).

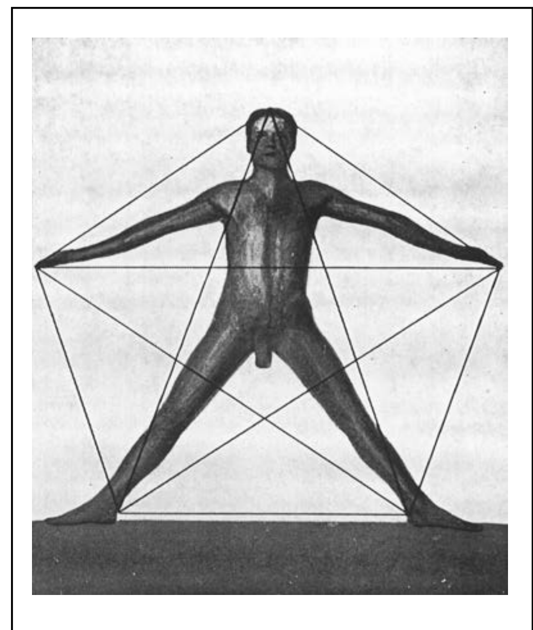
LÁMINA 21



1.34.- Explicación del diagrama de la lámina precedente (Helen Wills).

Se trata, en primer lugar, del americano JAY HAMBIDGE que basa sus teorías en la *Simetría dinámica*; en segundo lugar del arqueólogo noruego F.M. LUND, quien, además de los templos griegos, ha estudiado muy especialmente los trazados góticos y, por último, un arquitecto y profesor de la Universidad de MUNICH llamado MOESSEL.

LÁMINA 22



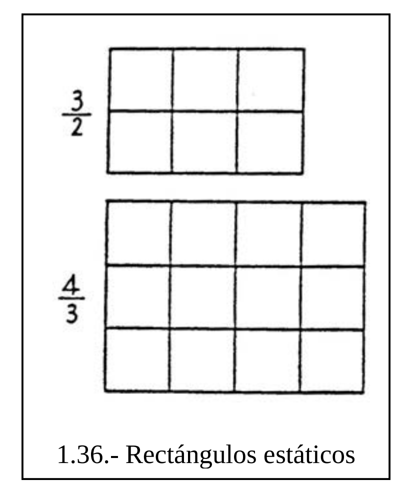
1.35.- El "Microcosmo".

Las teorías de HAMBIDGE, se basan, principalmente, en el empleo preponderante, como superficies generales de encuadramiento y elementos de superficie, de un cierto número de rectángulos, denominados por el propio HAMBIDGE como *dinámicos*, de tal naturaleza que sus módulos, relación entre las longitudes de los lados mayor y menor y que basta para caracterizar la forma de un rectángulo, no fuesen ya números racionales como: $\frac{4}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \ldots$, a los que está reservada la denominación de rectángulos de *simetría estática* o *rectángulos estáticos*, sino números inconmensurables como:

$\frac{\sqrt{2}}{1}, \frac{\sqrt{3}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\frac{\phi}{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618\ldots$ (razón de la *sección áurea*, emparentada algebraica y geométricamente con los temas en $\sqrt{5}$). Dicho de otra forma a los que expresan su módulo con un número algebraico euclidiano, es decir irracional, construible con regla y compás. Los rectángulos $\frac{\sqrt{4}}{1} = \frac{2}{1}$ y $\frac{\sqrt{1}}{1} = \frac{1}{1}$, es decir, el doble cuadrado y el cuadrado, forman parte tanto de la serie de rectángulos dinámicos como estáticos (1.36).

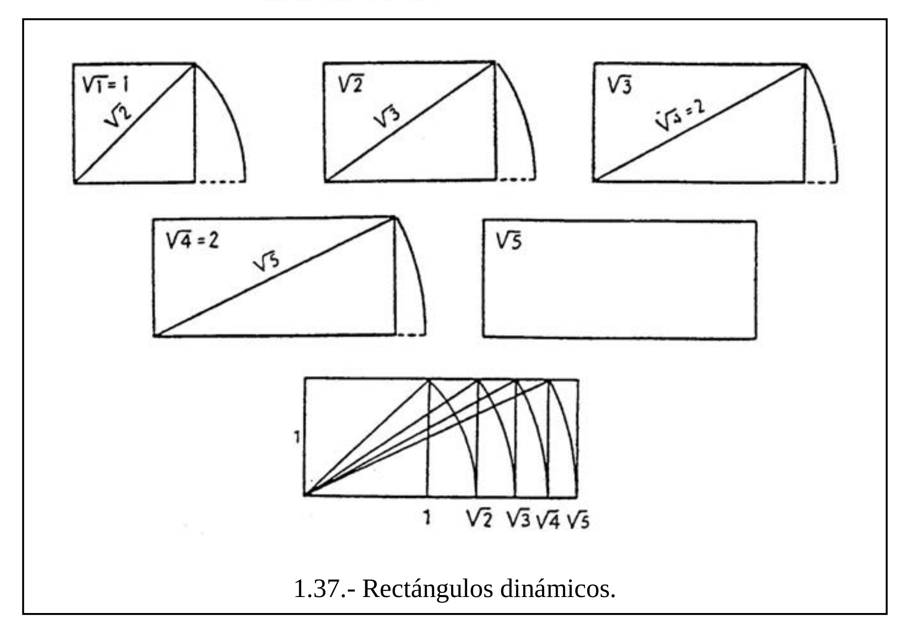
En la figura 1.37, podemos observar una serie de rectángulos dinámicos, así como un rectángulo final en el que podemos contemplar el resultado completo.

LÁMINA 23



1.36.- Rectángulos estáticos

LÁMINA 24

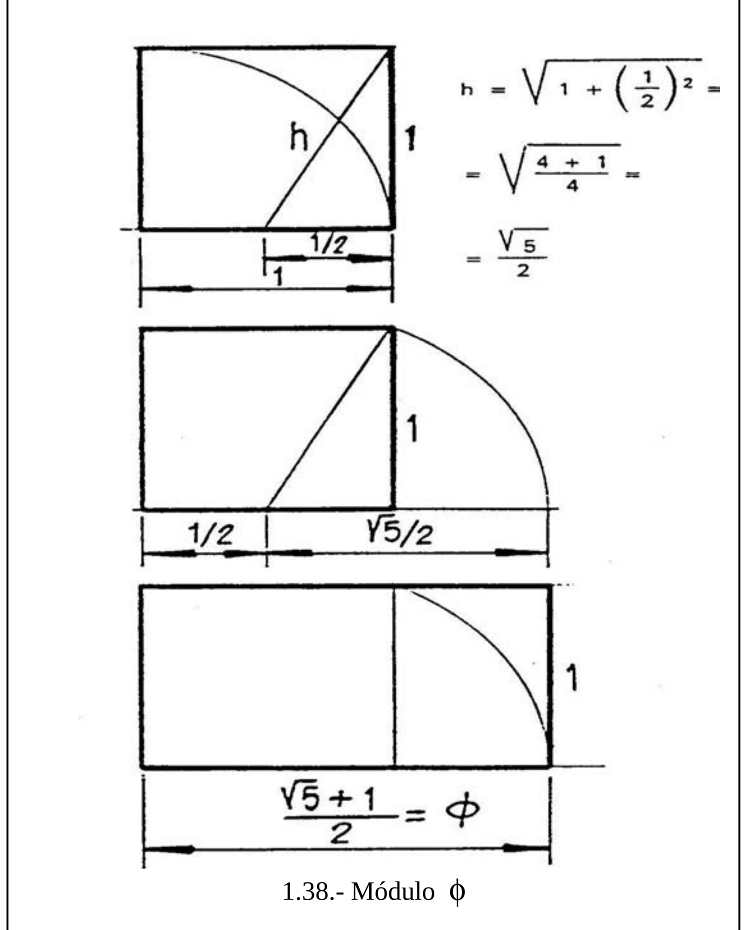


1.37.- Rectángulos dinámicos.

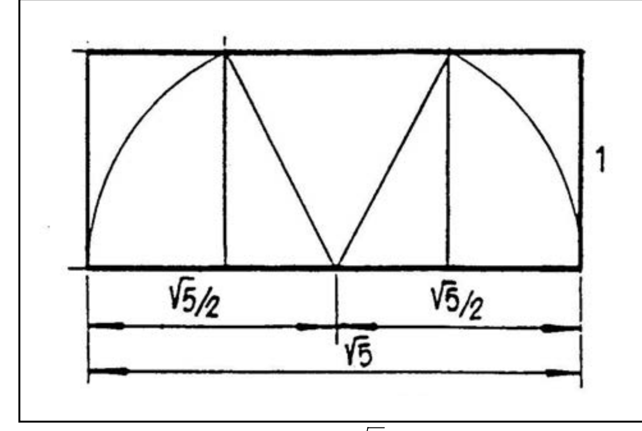
El profesor GHYKA hace el siguiente comentario sobre el método de HAMBIDGE: ***"…luego de haber compilado un gran número de medidas, remitiéndose a los monumentos, estatuas, vasos, etc…, llega a la conclusión de que todo el arte griego de la gran época (siglos VI a II antes de Cristo), como antes el arte egipcio, estaba fundado en el empleo de rectángulos dinámicos , puesto de manifiesto por la ausencia de razones sencillas conmensurables entre la mayor parte de las longitudes; en cambio, las razones sencillas pueden aparecer entre las superficies para las cuales las razones de semejanza son, naturalmente, proporcionales al cuadrado de la razón lineal correspondiente."***

En la figura 1.38, podemos observar la simplicidad gráfica con que se puede obtener el rectángulo de módulo ϕ.

LÁMINA 25



1.38.- Módulo ϕ



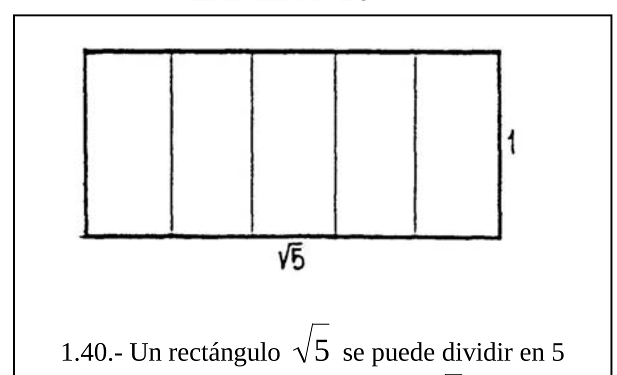
1.39.- Módulo $\sqrt{5}$

Así mismo, en la figura 1.39, el rectángulo $\sqrt{5}$ está emparentado con el rectángulo de módulo ϕ, ya que siempre podremos poner : $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ o lo que es lo mismo $\sqrt{5} = 2\phi - 1$.

En la figura 1.40, podemos observar como cuando el módulo es de la forma **n** (siendo n entero), puede un rectángulo dividirse en **n** rectángulos de igual módulo.

En la figura, el módulo **m** será $\frac{\sqrt{5}}{1}$. Sin embargo el módulo de cada rectángulo parcial, aplicando el mismo criterio, será: $\mathbf{m'} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$.

LÁMINA 26

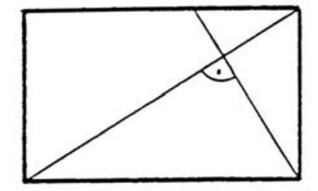
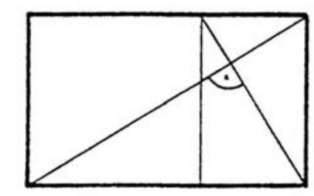
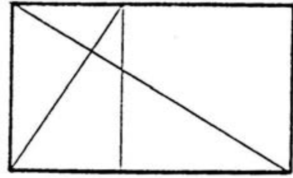


1.40.- Un rectángulo $\sqrt{5}$ se puede dividir en 5 rectángulos semejantes (de módulo $\sqrt{5}$ cada uno).

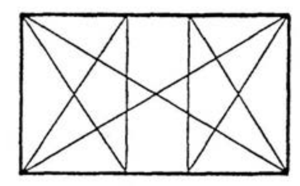
La segunda teoría de HAMBIDGE, se basaba en la subdivisión *armónica* de estos rectángulos de encuadramiento en superficies rectángulares de diferentes magnitudes, relacionadas, entre sí, por un encadenamiento continúo de proporciones.

Este método de *descomposiciones armónicos* está basado en la creación recurrente, en el interior de la superficie de encuadramiento y de sus subdivisiones primarias, de superficies semejantes (recíprocas) o emparentadas, por el simple trazado de las diagonales y perpendiculares bajadas sobre estas desde los vértices de los diferentes rectángulos dados o progresivamente obtenidos. Como consecuencia, podemos definir como *rectángulo recíproco* aquel de igual forma (igual módulo, semejante), obtenido sobre otro y en posición tal que los lados homólogos sean perpendiculares y, por tanto, con sus diagonales también perpendiculares.

LÁMINA 27

1.41.- Rectángulo recíproco obtenido mediante el uso de diagonales. 1.42.- La partición tiene otra solución.

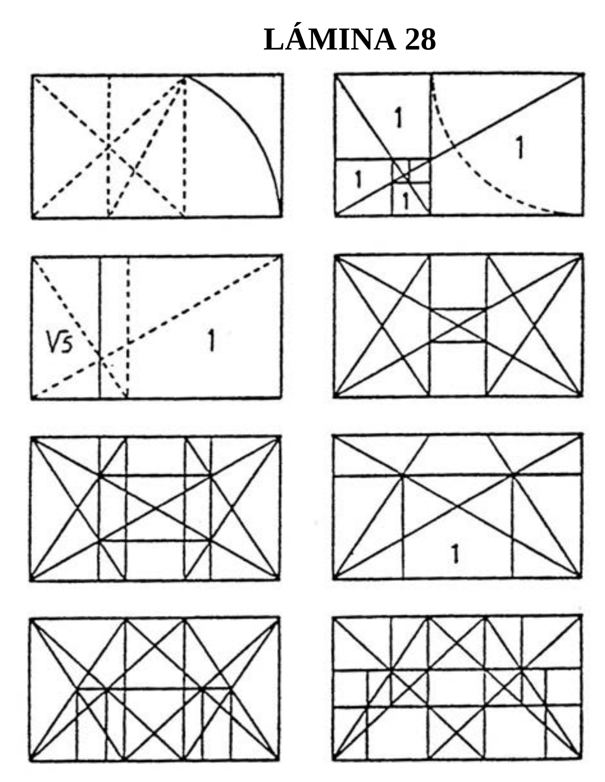


1.43.- El diagrama completo.

En la figura 1.43, podemos observar el diagrama completo, una vez que hemos aplicado el método correspondiente para la construcción del rectángulo recíproco. (1.41 y 1.42).

A continuación aplicamos el estudio de *rectángulos recíprocos* mediante el trazado de las diagonales, a los rectángulos de módulos más utilizados, poniendo nuestra atención en las subdivisiones armónicas del rectángulo ϕ, cuyo módulo es igual a la razón de la *sección áurea*. Tiene la notable propiedad de que la subdivisión armónica elemental, obtenida bajando desde un vértice la perpendicular a la diagonal opuesta, determina un cuadrado, además de un rectángulo de módulo ϕ o más bien $\frac{1}{\phi}$, semejante, pero dispuesto perpendicularmente al primero en el interior de

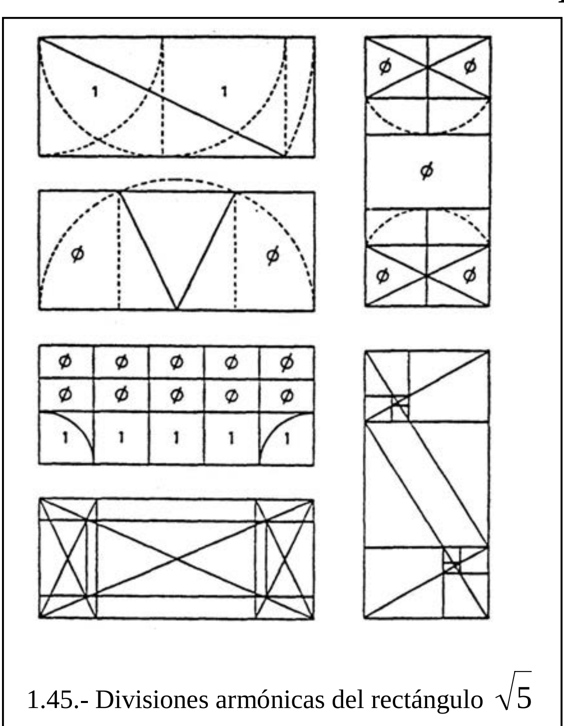
LÁMINA 28



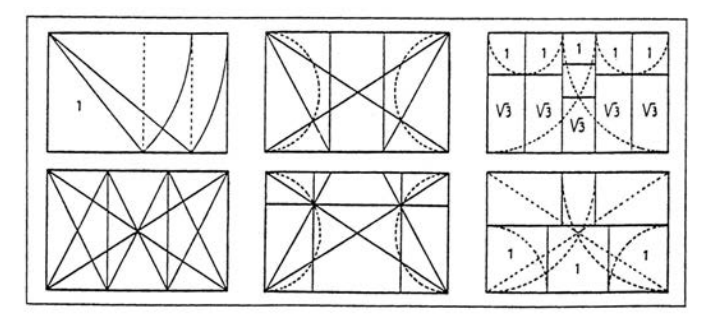
1.44.- Divisiones armónicas del rectángulo ϕ

este. Como esta subdivisión la podemos repetir indefinidamente, dio lugar a que HAMBIDGE bautizase con la denominación de *rectángulo de los cuadrados giratorios* al rectángulo de la *sección áurea*. Este diagrama de los cuadros giratorios tiene una espiral directriz que es la *curva de crecimiento armonioso,* espiral logarítmica de pulsación o efecto cuadrantal ϕ, envolvente ideal del crecimiento *pseudognomómico* esquematizado en la sucesión de FIBONACCI (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …), y que ya nos hemos encontrado antes como aproximación discontinúa, o sea, la sucesión ϕ.(1.44).

LÁMINA 29

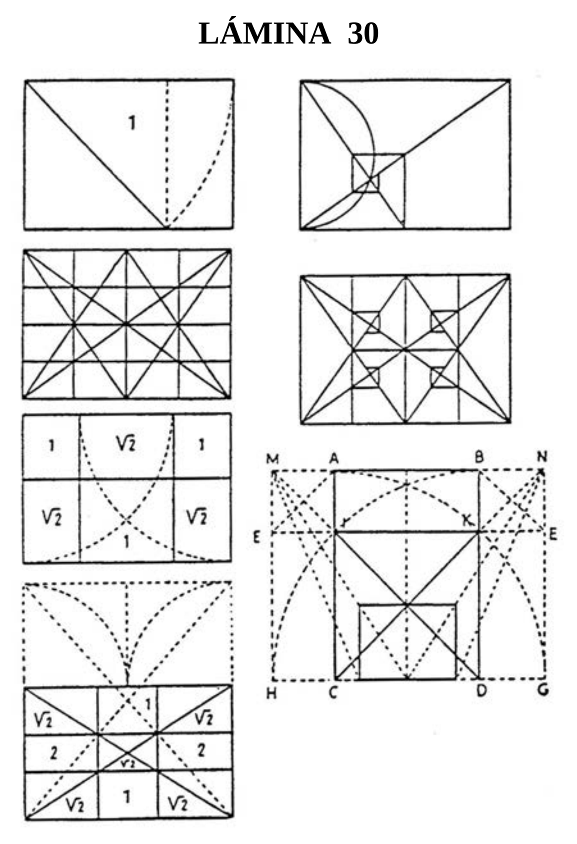


1.45.- Divisiones armónicas del rectángulo $\sqrt{5}$



1.46.- Divisiones armónicas del rectángulo $\sqrt{3}$

LÁMINA 30



1.47.- Divisiones armónicas del rectángulo $\sqrt{2}$

Este método de composición y análisis de las superficies rectángulares había sido sugerido a HAMBIDGE por diversos pasajes del TEÉTETO de PLATÓN, donde se refiere a números o razones *conmensurables en potencia*. Su teoría se aplica perfectamente a estas combinaciones de superficies rectángulares que, aunque derivadas de rectángulos de encuadramiento de módulos inconmensurables, pero fáciles de construir con la regla y el compás, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ϕ, etc…, no solamente son conmensurables entre sí, las superficies obtenidas por esta descomposición *armónica*, sino que forman siempre un encadenamiento graduado, una serie o progresión de

superficies relacionadas entre sí y a la superficie del conjunto por una misma proporción, exactamente como lo exige VITRUVIO para los elementos de superficie o de volumen relacionados *por la simetría basada sobre la proporción que los griegos llamaban analogía*. En las figuras 1.45, 1.46 y 1.47, podemos observar las divisiones armónicas del rectángulo con módulos de encuadramiento inconmensurables $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$. El TEÉTETO, nos muestra también, como el TIMEO, que siempre que los antiguos hablaban de proporciones analizables entre superficies o entre *números planos*, estos fueron siempre *números rectángulares,* es decir, que eran superficies rectángulares las que comparaban.

Este estudio de las proporciones entre números rectángulares (a x b, c x d, donde a, b, c, y d, eran en su origen números enteros), fue el que condujo directamente el estudio de las proporciones irracionales, pero *conmensurables en potencia,* en cuanto se trató de intercalar una *media geométrica* entre dos números planos. La interpretación de HAMBIDGE de la *simetría dinámica* suministra una hipótesis plenamente satisfactoria para explicar lo que, en texto latino, se refiere la famosa trinidad: euritmia, simetría, analogía y, especialmente, a la distinción entre la *simetría aritmética* y la *geométrica* que permite ajustar las proporciones a las superficies.

La prueba de la importancia de la simetría, como la disciplina maestra de la ciencia arquitectónica de la antigüedad, se encuentra en el mismo VITRUVIO, en el que este término se repite como *leitmotiv* y se considera resumen de la esencia de la arquitectura.

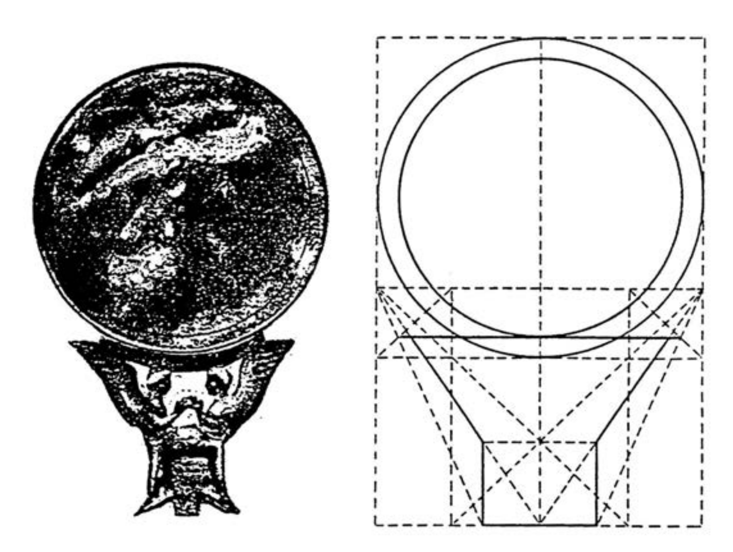
El papel de esta simetría, conmensurabilidad de las partes entre sí y entre las partes y el conjunto, en lo que concierne a los elementos lineales, o *simetría dinámica* en lo que se refiere a las superficies, era perfectamente comprendido por los primeros seguidores o comentadores de VITRUVIO, tanto arquitectos como matemáticos.

El mismo PACCIOLI, aconseja, en su DE DIVINA PROPORTIONE, que los arquitectos deben emplear todas las simetrías, *incluso las irracionales que, como la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado, no pueden expresarse en números enteros y sus partes alicuotas.* Más adelante, vuelve a reafirmarse sobre la misma idea:…*cuando no se pueden emplear las simetrías simples como 1/2, 1/3, 3/4, 2/3, …, etc, se deben utilizar las proporciones irracionales; en este caso, los*

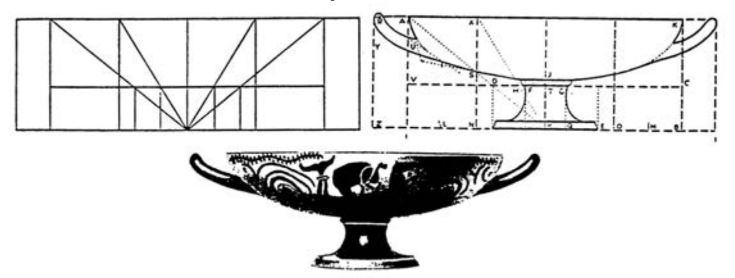
puntos, en vez de estar determinados por números, lo estarán por líneas o superficies, ya que la proporción tiene un empleo mucho más amplio en el dominio de las cantidades continuas que en el de los números enteros y, como consecuencia, el geómetra se ocupará tanto del dominio irracional como del otro.

El procedimiento de HAMBIDGE, no sólo tiene la ventaja de introducir, en la superficie descompuesta armónicamente, sucesiones de superficies decrecientes semejantes o emparentadas con la primera, sino también la de excluir automáticamente toda superficie de simetría *extraña,*

LÁMINA 31

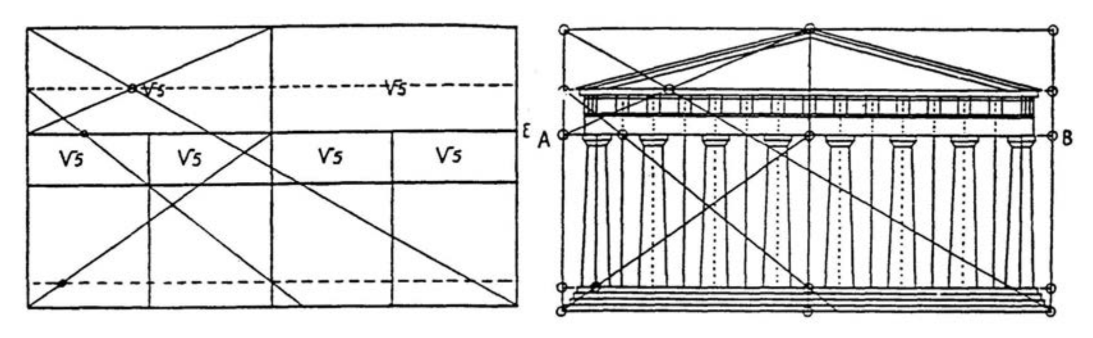


1.48. Espejo griego de bronce, del museo de Boston y su trazado dinámico basado en el rectángulo $\sqrt{2}$

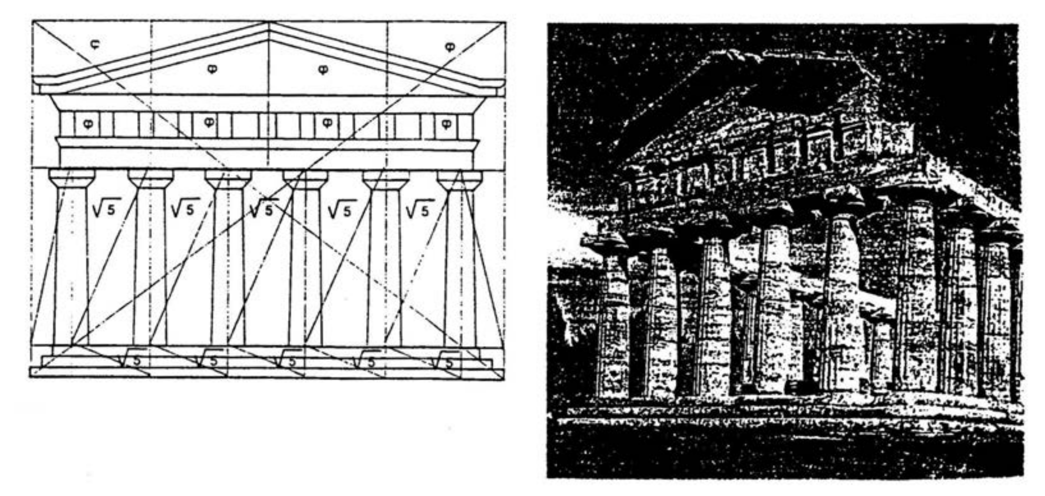


1.49. Vaso griego (Kvlix) del Museo Británico. Trazado dinámico en tema ϕ.

LÁMINA 32



1.50. Análisis armónico del frontón del Partenón, según Hambidge.



1.51. El templo de Ceres en Paestum.

respetando en este hecho una *ley de no-mezcla* de temas, que confiere a todo plano así tratado un carácter armonioso y orgánico.

Conviene recordar aquí, que entre todos los temas dinámicos, los basados en $\sqrt{5}$ y ϕ, es decir, en la *sección áurea*, ofrecen una variedad y una flexibilidad mucho mayores que los otros dos temas dinámicos simples $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, encontrándose mucho más a menudo que estos últimos en los esquemas arquitectónicos o decorativos egipcios y griegos.

A continuación podemos observar algunas descomposiciones armónicas de los rectángulos según el método de HAMBIDGE.

En las figuras 1.48, 1.49 y 1.50 podemos apreciar un espejo y su trazado dinámico basado en el rectángulo $\sqrt{2}$, un vaso griego, como aplicación de un trazado dinámico en tema ϕ, y el análisis armónico del frontón del Partenón, según HAMBIDGE.

En el Templo de Ceres en PAESTUM (1.51), podemos observar como una fachada está construida siguiendo un sistema de triángulos áureos, al igual que los mayores templos griegos relacionados, sobre todo, con el orden dórico.

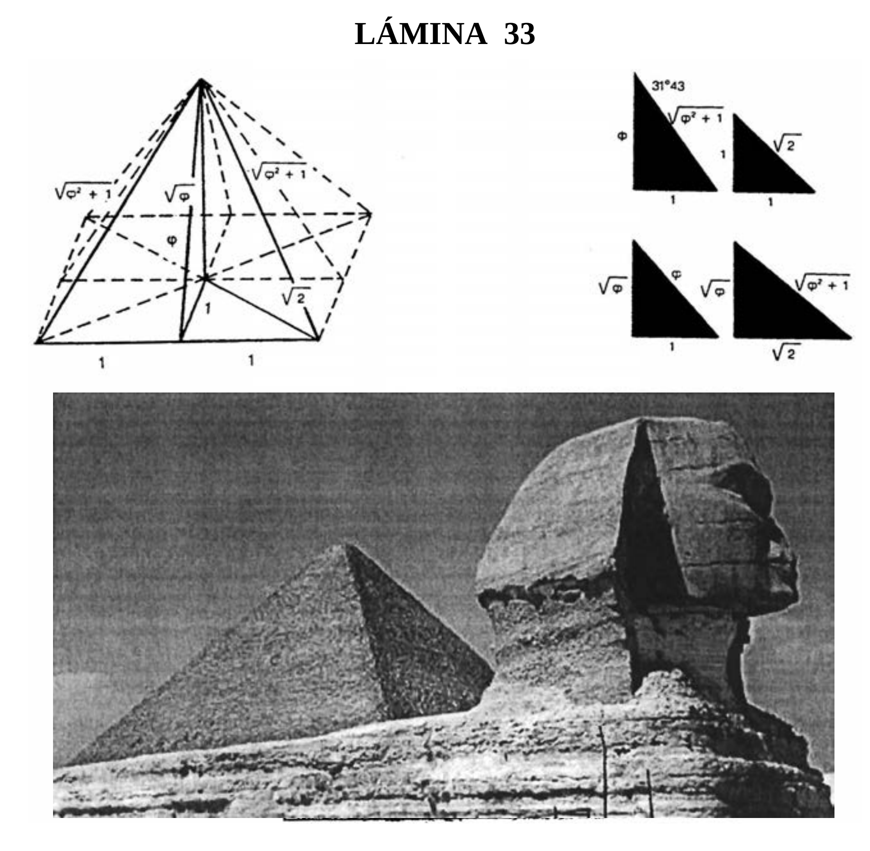
En la figura 1.52, podemos observar la Pirámide de KEOPS en GIZEH. Tiene cada una de sus caras formada por dos medios triángulos áureos; la más evidente, aunque no la única, relación armónica identificable en el análisis de las proporciones de este monumento funerario en apariencia simple.

Después de haber realizado el estudio de las teorías seguidas por HAMBIDGE, vamos a referirnos al sistema utilizado por el arqueólogo noruego F.M. LUND, quién, además de los templos griegos, estudia especialmente los trazados góticos.

Este famoso arqueólogo noruego descubre, en los numerosos planos examinados por él, la existencia de una real de dobles-cuadrados sobre la que se encuentran trazados *radiantes* que tienen como polo aritmético, coincidiendo a menudo con el centro del altar mayor sobre la planta y con el del rosetón sobre el alzado, el centro de un pentágono o de un pentagrama.

Podemos observar como, al igual que HAMBIDGE, también LUND sigue la huella de los pasajes de PLATÓN, y por supuesto, sigue, a través de las distintas edades, la influencia de las ideas expresadas en el TIMEO sobre la importancia de los cinco poliedros regulares y de su estructura. El importante papel atribuido por PLATÓN al dodecaedro, la importancia del pentagrama, y desde luego, de la *sección áurea*, sirven de guía a LUND y le hacen encontrar, en un texto *gótico* la frase capital con la que CAMPANO DE NOVARA (siglo XIII), rinde homenaje a la *sección áurea* por tratarse de la proporción que en una *sinfonía irracional* (es decir, una simetría

LÁMINA 33



1.52. La pirámide de Keops en Gizeh.

dinámica de números irracionales conmensurables solo en potencia), relacionan de la manera más racional las proporciones de los cuerpos platónicos.

LUND demuestra, como la red de dobles cuadrados, grandes y pequeños, que encuentra en casi todos los planos góticos que examina no da más que la trama elemental, articulada o drapeada, como si se tratase de una tela sobre la armadura del trazado. Sin embargo, la cortadura, el ritmo principal de esta armadura es casi siempre un tema independiente de esta red y cuyos elementos principales, tanto en la planta como en el alzado, son, a menudo, suministrados por un gran pentágono y una serie decreciente de los pentagramas inscritos en él.

Por último, vamos a referirnos a MOESSEL. Se trata de un arquitecto que, habiendo llegado a la conclusión de que el problema que domina en arquitectura a todos los demás es el de la proporción, consagra una parte muy importante de su vida a medir o cotejar desde el punto de vista de las longitudes, de las superficies y de los volúmenes, las dimensiones y proporciones de todos los edificios egipcios, griegos y góticos de los que se conservan planos en perfecto estado. A priori, no partió de ninguna idea o teoría, sin embargo, de la comparación de centenares de trazados, dedujo analogías y semejanzas además de impresionantes identidades.

Entre los millares de razones numéricas establecidas, reaparecían siempre ciertos números así como sus potencias y las sucesiones de estas potencias ordenadas en progresiones.

Todos los diagramas geométricos, tanto para las plantas como para las alzadas y secciones verticales, se reducían a la inscripción en un círculo, o en varios círculos concéntricos, de uno o varios polígonos regulares.

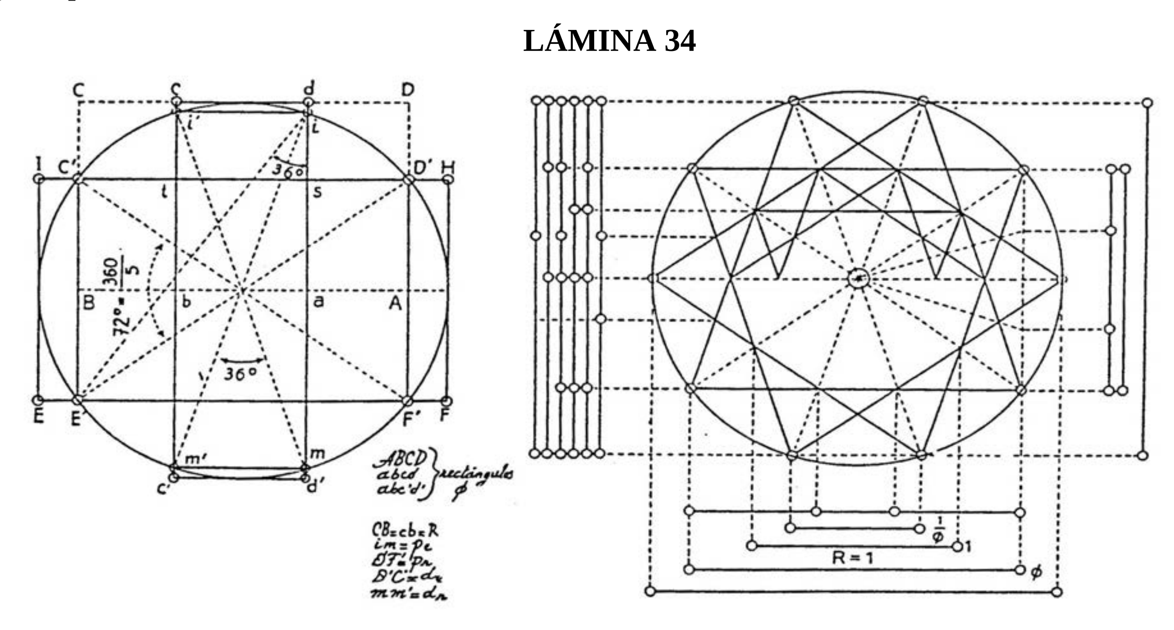
A veces, se trataba de la división del círculo sobre el plano horizontal en 4, 8 ó 16 partes iguales y las diversas combinaciones de cuadrados y de rectángulos sugeridos por los puntos y las líneas así obtenidos suministraban la armazón del plano. Como consecuencia, se imponía una sencilla teoría: este círculo director era como una derivación del círculo de orientación del edificio trazado sobre el terreno mismo, idea que cuadraba con la importancia casi religiosa atribuida a la orientación de los templos primero entre los egipcios y luego entre los griegos y los romanos.

VITRUVIO describió con toda claridad este procedimiento. Sobre una gran circunferencia, trazada en el mismo suelo, la sombra de alcance mínimo, que corresponde a la máxima altura del sol sobre el horizonte y en su mediodía real, de un mástil colocado al centro del círculo, da rigurosamente la dirección Norte-Sur. El diámetro perpendicular dará sobre el círculo, las direcciones Este y Oeste. Se sabe, que por medio de una cuerda cerrada dividida por nudos en 3 + 4 + 5 = 12 segmentos iguales, los *arpedonaptas* o geómetras-agrimensores de la antigüedad trazaban una perpendicular rigurosa señalando sobre el suelo un triángulo de PITAGORAS por medio de tres estacas. En la actualidad, no existe ninguna duda de que los antiguos atribuían al descubrimiento de PITAGORAS, en lo que concierne al cuadrado de la hipotenusa, una gran importancia; aprovechándose de este descubrimiento para lograr un método con el cual construían con toda exactitud el ángulo recto.

Por otra parte, MOESSEL observó que los trazados más numerosos no eran suministrados por esta representación natural y *astronómica* del círculo de orientación en 4, 8, ó 16 partes, sino por una división más sutil en 10 ó 15 partes, es decir, por la inscripción en este círculo, convertido un círculo director de un plano-gálibo o plano-patrón en magnitud natural, de un decágono o de un

pentágono regular. Esto se aplica tanto a los trazados egipcios como a los trazados clásicos griegos de la gran época.

LÁMINA 34



1.53. Sistemas de proporciones obtenidas por la segmentación polar del círculo, según Moessel.

Por lo tanto, no nos extrañaremos al comprobar que las razones, así como sus potencias, aparezcan continuamente en las tablas numéricas de proporciones calculadas por MOESSEL, independientemente de sus trazados. Son la razón ϕ = 1,618… ó *número de oro*, sus potencias ϕ^2, ϕ^3, ϕ^4, …, etc, las potencias decrecientes $\frac{1}{\phi}, \frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi^3}, \ldots$ así como $\sqrt{5} = 2\phi - 1 = 2{,}236\ldots$, ya que sabemos que de ésta razón de la *sección áurea* dimanan las armónicas y correspondencias de todo trazado de base pentagonal o decagonal. (1.53).

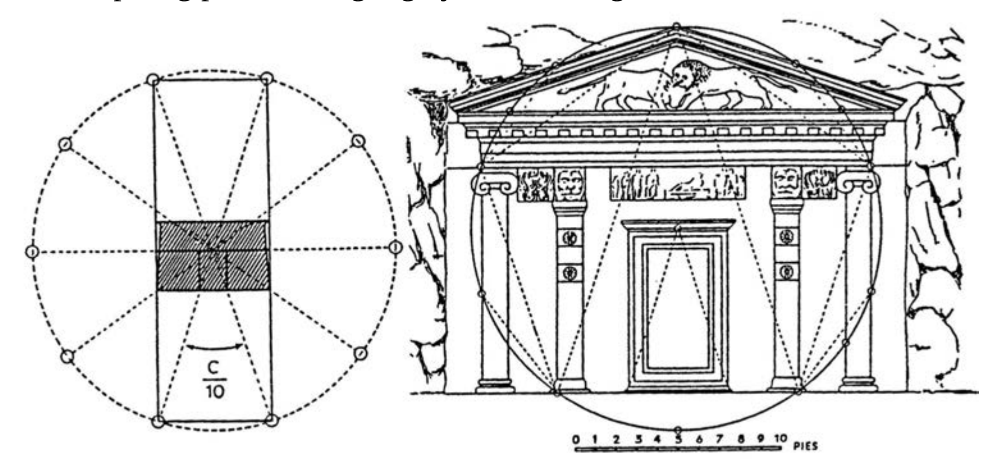
De esta forma, MOESSEL pudo clasificar los trazados de casi todos los monumentos estudiados por él en un cierto número de tipos específicos basados sobre lo que se llama la segmentación polar del círculo director o *Kreisteilung*, tanto en las plantas como en los alzados de cada edificio, estando los elementos y conjuntos de los trazados tanto verticales como horizontales

relacionados por cadenas de proporciones en que vuelven en *leit-motiv* los temas conocidos de la *sección áurea*.

Tengamos en cuenta que, mientras el método de HAMBIDGE impone lo que hemos llamado la *ley de no-mezcla de los temas,* MOESSEL encuentra en ciertos casos dos círculos directores concéntricos, el mayor de los cuales, correspondiente al trazado exterior del edificio considerado, está dividido en 8 ó 16 partes (simetría ortogonal, es decir, cuadrada de módulo $\sqrt{2}$), mientras que el otro que corresponde al núcleo, está dividido en 5 ó 10 segmentos (simetría pentagonal o *áurea* de módulo ϕ ó $\sqrt{5}$). El trazado vertical (fachada o corte transversal) del edificio, proyectado sobre el mismo diagrama, está regido en este caso por el círculo director interno (de simetría pentagonal); pero uno de sus elementos lineales es igual a un elemento suministrado por el otro círculo, lo que crea un enlace orgánico o una *concatenación* de todos los elementos, a pesar de la presencia de dos temas distintos.

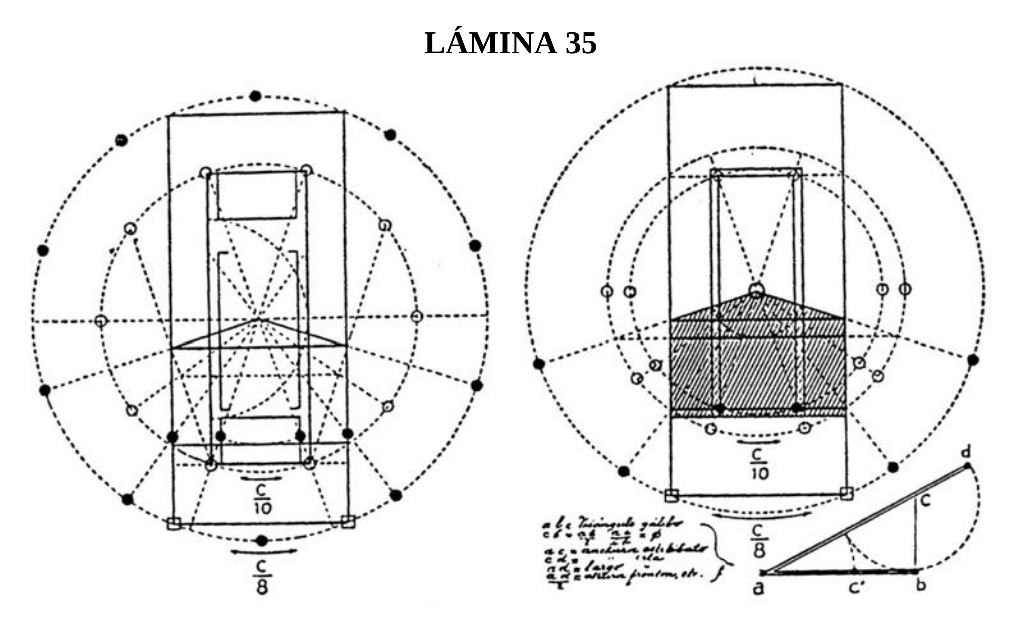
Como consecuencia de todo lo anterior, podemos observar los tipos generales de esquemas de la obra de MOESSEL para darnos cuenta de que se aprovecha, en cierto modo, de los rectángulos dinámicos de HAMBIDGE.

En las figuras 1.54, 1.55 y 1.56, podemos observar esquemas descubiertos por MOESSEL y que se refieren a un templo egipcio, a uno griego y a una nave gótica.

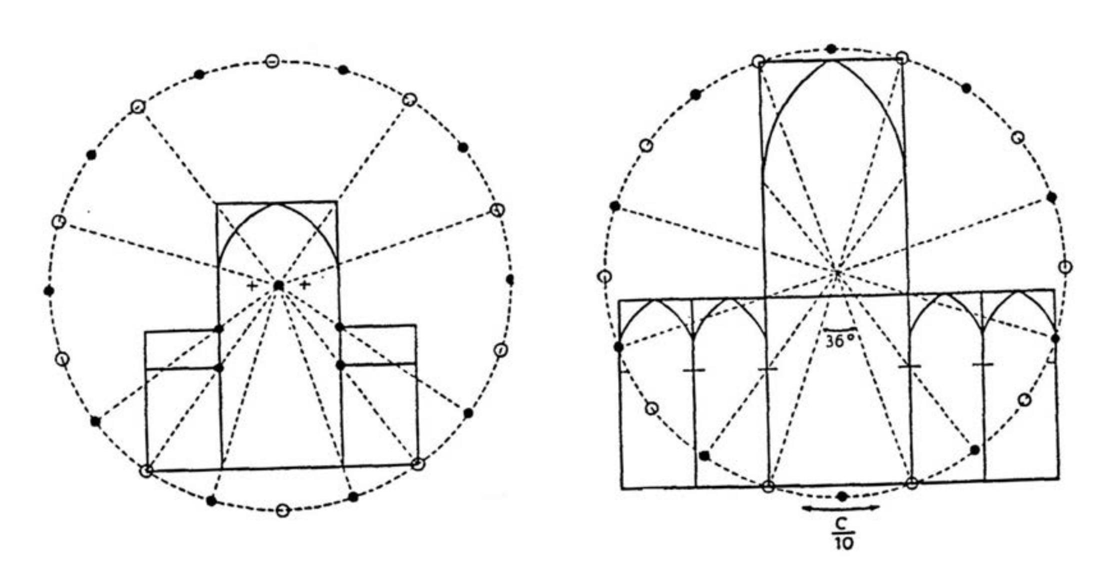


1.54.- a) Esquema del templo egipcio, según Moessel. b) Tumba rupestre de Mira (Asia Menor). Moessel, *Die Proportion in antique und Mittelalter.*

LÁMINA 35



1.55.- Esquemas tipos de templos griegos, según Moessel.



1.56.- Puesto en proporción transversal de naves góticas, según Moessel.

La teoría general de las proporciones, comprendidas en ellas las armónicas y geométricas asociadas a la década y a la tetracto, el estudio de las proporciones entre volúmenes y el de los cinco cuerpos regulares, unido todo ello a la idea egipcia de la correspondencia deseable entre el Templo y el Universo, a la de la correlación entre el Universo vivo y el hombre (macrocosmo-microcosmo), debían converger justamente en la técnica de los arquitectos hacia estos trazados de sutiles correspondencias euritmicas entre longitudes, superficies y volúmenes, que por la dificultad que hemos tenido para descifrarlos bien merecen la calificación de esotéricos o, lo que es lo mismo, reservados sólo para los iniciados en estas materias.

La transmisión a los góticos de esta concepción esotérica de la arquitectura se hizo mediante las corporaciones de constructores y la filosofía neoplatónica.

Fue PLATÓN quien suministró a MOESSEL el hilo que le llevaría a su atrayente síntesis; en un pasaje de FILEBO puede leerse: *lo que aquí entiendo por belleza de la forma no es lo que el vulgo comprende generalmente bajo este nombre como, por ejemplo, la de los objetos vivos o de sus reproducciones, sino algo de rectilíneo y de circular, y las superficies y cuerpos sólidos compuestos con lo rectilíneo y lo circular por medio del compás, de la cuerda y de la escuadra. Pues estas formas no son, como las otras, bellas solo bajo ciertas condiciones, sino que son siempre bellas en sí mismas.*

VITRUVIO, describe el trazado clásico de los teatros griegos, en cuyo círculo director se inscriben tres cuadrados, y el trazado romano, en el cual, por el contrario, intervienen cuatro triángulos equiláteros. En uno y otro caso el círculo está dividido en 12 segmentos y el texto es bastante preciso para que sea posible trazar los planos correspondientes, en los que, lo mismo que en los diagramas de MOESSEL, ningún punto está librado a la fantasía, siendo todo determinado por la simetría geométrica del concepto.

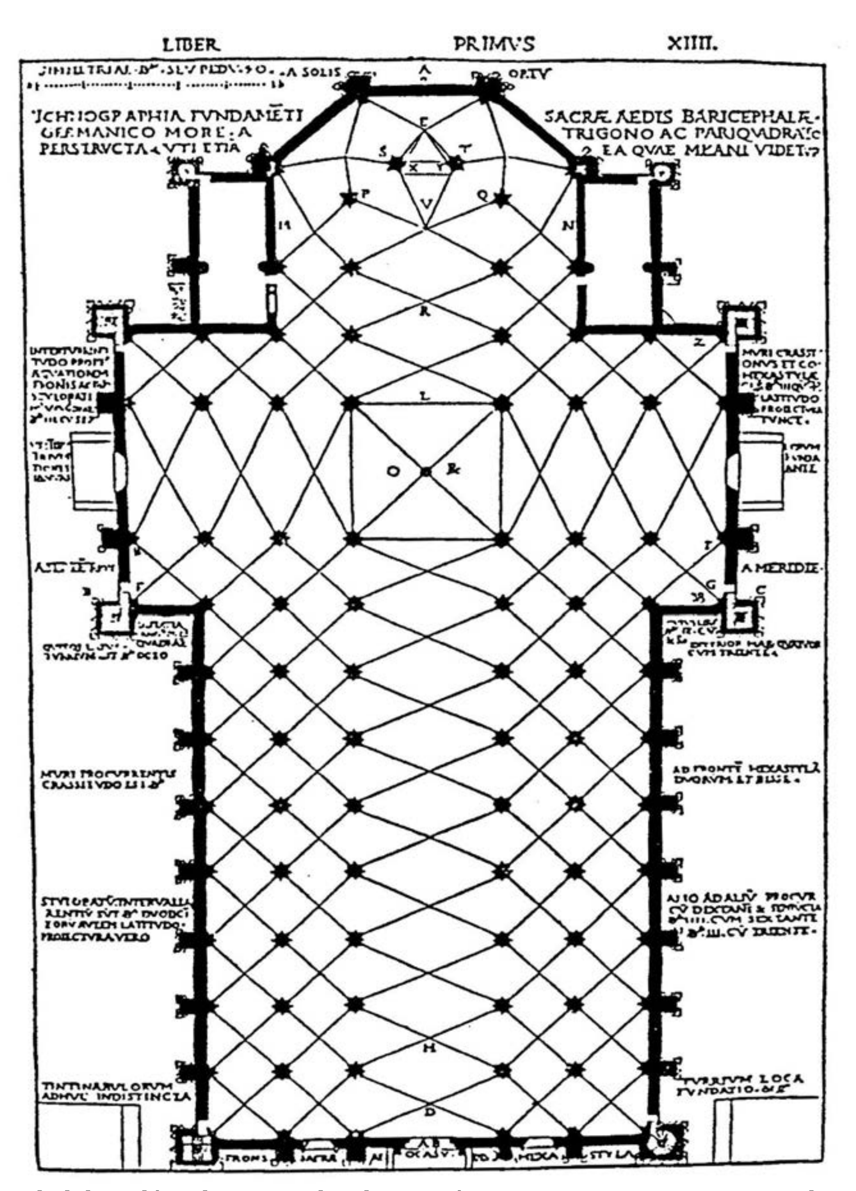
De igual modo, una interesantísima lámina del VITRUVIO de CESAR CESARIANO (1.521), que representa la fachada de la Catedral de Milán, se adapta a la teoría de MOESSEL apareciendo trazado el círculo director. En las figuras 1.57, 1.58, y 1.59, podemos observar distintas partes de la Catedral de Milán reproducidas por CESAR CESARIANO en su comentario sobre VIRTUVIO.

No quedaría completo este estudio sobre las teorías de MOESSEL, sino citásemos algunas de sus frases como reafirmación de las bases de su sistema:

La composición de los planos arquitectónicos desde el comienzo de la arquitectura egipcia hasta el fin de la Edad Media, no es aritmética, en la mayoría de los casos, sino geométrica. Deriva de las segmentaciones angulares regulares del círculo… .De las diferentes particiones del círculo derivan sistemas de rectángulos, triángulos, polígonos convexos y estrellados, que representan redes que tienen la forma y el significado de los sistemas de coordenadas. Estas conformaciones geométricas son los fundamentos de las composiciones artísticas en arquitectura, pintura y escultura en bajorrelieves.

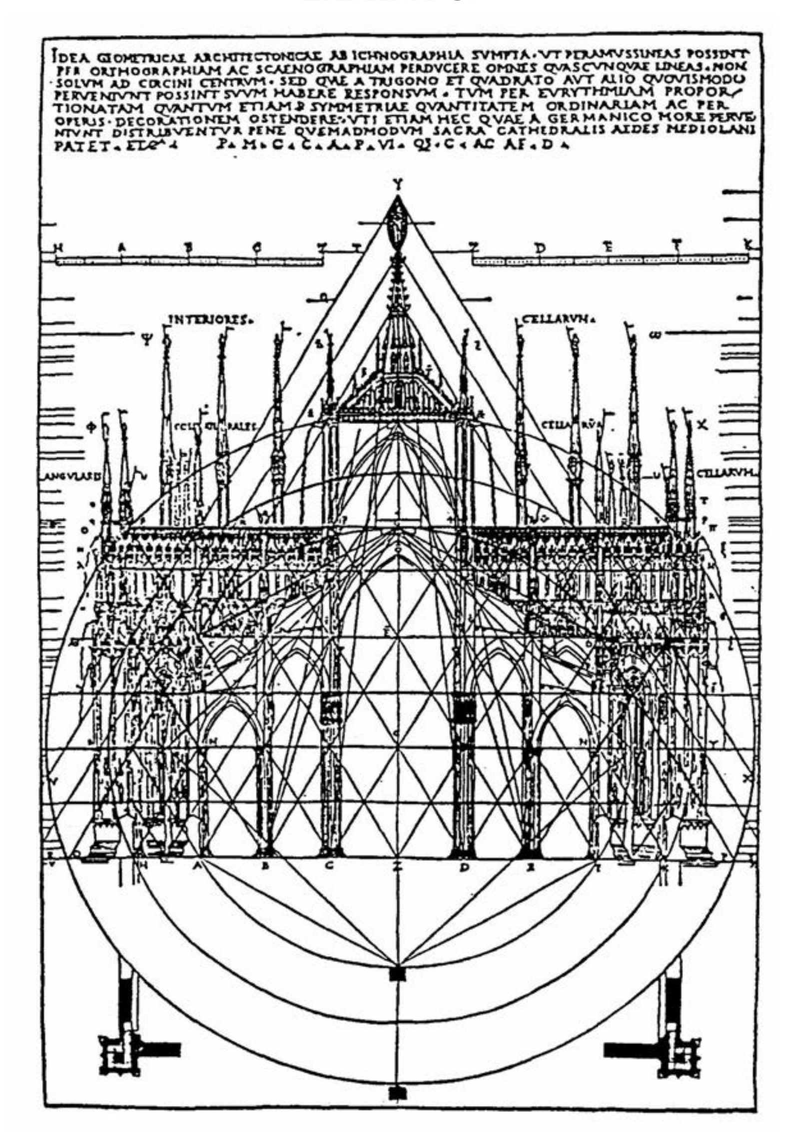
Esta geometría que se mueve en el plano, contorno horizontal y alzada, se puede considerar como la proyección de una geometría en el espacio. Las particiones específicas del círculo y las razones numéricas que las caracterizan aparecen en las proyecciones planas de los cuerpos regulares inscritos en la esfera, tetraedro, octaedro, cubo, dodecaedro e icosaedro. Estos cuerpos platónicos desempeñan un papel excesivamente importante en toda la teoría y la práctica de la antigüedad y de la Edad Media, a la vez que como punto de partida de las especulaciones cosmogónicas.

LÁMINA 36



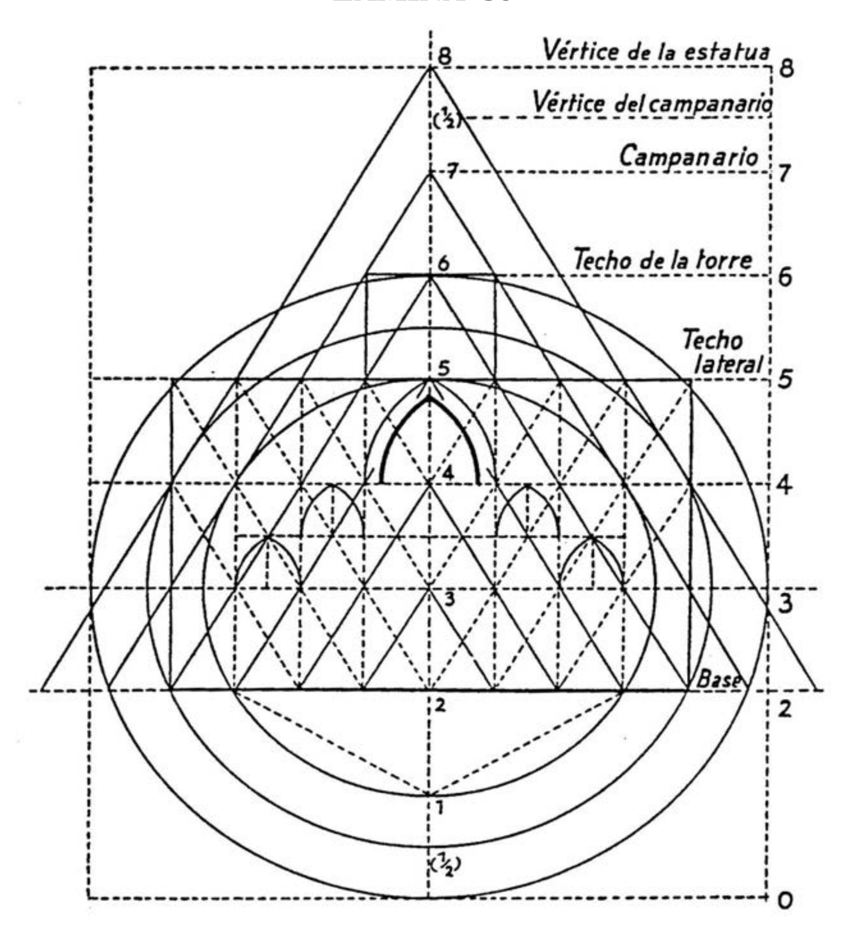
1.57.- Catedral de Milán. Plano reproducido por César Cesariano en su comentario de Vitruvio.

LÁMINA 37



1.58.- Catedral de Milán. Alzada y corte transversal, por César Cesariano (1521).

LÁMINA 38



1.59. Análisis del trazado.

La participación decádica del círculo y sus derivados parecen ser los sistemas más empleados por los antiguos maestros. Mediante la ***sección áurea****, proporción continua por excelencia, que es la consecuencia de estos sistemas, los elementos de los edificios están armonizados en cadenas crecientes o decrecientes donde las medidas de las dimensiones extremas de la planta o de la alzada hasta las más pequeñas subdivisiones de las partes componentes, y esto del modo más sencillo.*

MOESSEL observa que sus diagramas planos, con sus polígonos y fragmentos de polígonos inscritos en un círculo, se pueden considerar como proyecciones o cortes de figuras sólidas en el espacio, siendo estas figuras poliedros inscritos en la esfera, lo cual es especialmente cierto para los diagramas de MOESSEL con su círculo director y, sobre todo, para los diagramas complejos de doble círculo director y temas mezclados en los cuales la proyección puede configurar poliedros diferentes, pero relacionados armónicamente por el hecho de su inscripción en la misma esfera.

MOESSEL analiza también los volúmenes constituidos por las envolturas principales de los monumentos egipcios, griegos o góticos, encontrándose a menudo con casos muy notables, siendo el más importante de ellos la Cámara del Rey, en la Gran Pirámide de Keops (aristas proporcionales a 1, 2, $\frac{\sqrt{5}}{2}$,… siendo la diagonal mayor proporcional a $\frac{5}{2}$, o aristas proporcionales a 2, 4, $\sqrt{5}$, ... , y diagonal mayor proporcional a 5, en cuyo caso uno de los *rectángulos diagonales* se compone de triángulos sagrados 3, 4, 5, otro vertical, es un doble cuadrado como el rectángulo de base), y otros muchos que no vamos a enumerar y en cuyas construcciones se encuentran las proporciones 1, ϕ, ϕ^2, ϕ^3, …, ó 1, $\sqrt{5}$, ϕ^3, …, etc.

Al estudiar a HAMBIDGE y a MOESSEL, nos damos cuenta de que sus teorías no son mas que dos formas diferentes (proyección ortogonal y proyección central) de plantear sobre una superficie plana la misma cosa en tres dimensiones, ya que los círculos directores de MOESSEL pueden colocarse en los trazados armónicos rectangulares de HAMBIDGE y viceversa .

Es imposible no asombrarse tanto por los resultados de MOESSEL en tal o cual trazado, como por la notable síntesis a que han conducido sus investigaciones. Su teoría es tan lógica que a primera vista dan ganas de adaptarla en forma exclusiva; pero tal vez esta decisión no se justificaría. Por el contrario, después de haber meditado sobre estas dos teorías, a la luz de los textos matemáticos griegos que se ocupan de la proporción y del texto de VITRUVIO, me parece que cada uno contiene una parte del secreto de las sinfonías arquitectónicas egipcias, griegas y góticas, y aún diría que entre las dos contienen la verdad y revelan todo el secreto.

Como resumen de todas las teorías que hemos visto y estudiado a lo largo de este trabajo, tenemos que sacar la contundente consecuencia de que un creador (arquitecto) auténtico, provisto de inspiración, pero que no compone geométricamente, que no ha meditado sobre las proporciones, (que inicialmente no posee como instrumento de compaginación y de regulación un instrumento como los de HAMBIDGE o de MOESSEL para manejar las superficies o volúmenes que derivan de la *sección áurea*) podrá hacer cosas magníficas, pero podrá también abortar en un detalle, y frustrar justamente la obra perfecta.

De igual modo, ente dos arquitectos sin inspiración, será el mas tolerable aquel que componga geométricamente sirviéndose de una técnica armónica, porque su técnica lo regulará de modo automático. El otro hará calcos, plagios, y, como consecuencia, su obra será mediocre ………………………………………………………………………………………………..…

……………………………………………………………………………………………………..

Aquí pongo punto final a esta incompleta, aunque suficiente compilación, de los estudios realizados por los padres de las culturas griega y egipcia como pioneros de la Expresión Artística, con ella, tengo la seguridad de haber logrado despertar en mis posibles lectores, la curiosidad y el interés por el estudio del la Geometría como base fundamental de nuestra cultura artística.

Segunda Parte

Resolución geométrica del problema

Se dice que un punto P divide a un segmento AB en media y extrema razón cuando su distancia a uno de los extremos A del segmento es media proporcional entre su distancia al otro extremo B y al segmento total AB.

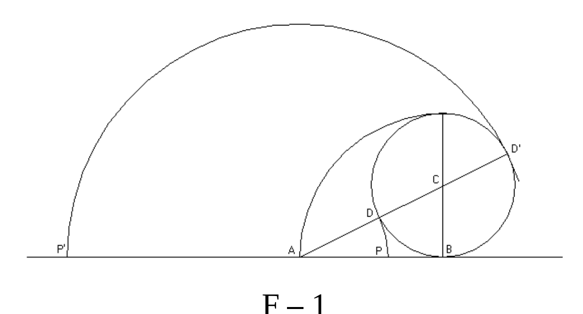
A P B

$$\overline{PA}^2 = AB \times PB$$

Este problema, de tantas aplicaciones en las construcciones geométricas y de una forma muy especial en la Expresión Artística como hemos comprobado en la primera parte de este trabajo, se ha resuelto de muy diversas maneras por expertos de todos los tiempos. Por nuestra parte, vamos exponer una serie de procedimientos geométricos, de variada dificultad, para, con su ayuda, obtener las soluciones buscadas.

Las construcciones geométricas que vamos a realizar en este estudio, no las exponemos a nuestros lectores como las únicas que pueden resolver el problema, sino que hemos elegido por un lado, aquellas que pueden ser interesantes desde un punto de vista más bien teórico, por su largo proceso de realización, y, por otro lado, aquellas construcciones practicas que abundan y se exponen en cualquier texto de geometría elemental.

2.1. **PRIMER PROCEDIMIENTO.**



F – 1

Este procedimiento, que vamos a exponer en primer lugar, es él mas conocido de todos. Su realización, con algunas variantes según el autor, puede encontrarla el lector en gran parte de los tratados de geometría a los que pueda tener acceso. (F-1)

En primer lugar, como podemos observar, entre A y B solo puede existir un punto P y solo uno que goza de la propiedad anunciada. Además, podemos deducir fácilmente que, desde A hasta B, la relación $\frac{AB}{PA}$ decrece de una manera continua desde el infinito, (PA=0), hasta la unidad, (AB = PA), mientras que la relación $\frac{PA}{PB}$ crece desde cero, (PA = 0), hasta el infinito, (PB = 0). Por lo tanto cuando el punto P se mueve de A a B, la primera relación disminuye, y la segunda aumenta. Como la primera razón empieza por ser mayor que la segunda y acaba siendo menor, existe, entre A y B, una posición de P, y solo una, para la cual tendremos que:

$$\frac{AB}{PA} = \frac{PA}{PB} \qquad \text{y por lo tanto}$$

$$\overline{PA}^2 = AB \times PB$$

$$\frac{AB}{PA} = \frac{PA}{PB} \qquad (1)$$

En segundo lugar, podemos comprobar también que, sobre la prolongación de AB, a la izquierda de A, existe un punto P´, y solo uno, que goza de la propiedad enunciada anteriormente.

En este lado del segmento, la relación $\frac{AB}{P\acute{}A}$ crece de una manera continua

desde cero hasta infinito, mientras que la relación $\frac{P\acute{}A}{P\acute{}B}$ decrece desde la unidad hasta cero. Por lo tanto, a la izquierda de A, existe una posición de P´, y solo una, para la cual se verifica que:

$$\frac{AB}{P\acute{}A} = \frac{P\acute{}A}{P\acute{}B} \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \overline{P\acute{}A}^2 = AB \times P\acute{}B \qquad (2)$$

Como podemos observar, sobre la prolongación de AB, a la derecha de B, no puede existir ningún punto que goce de la propiedad anterior. La distancia de un punto de esta parte del segmento al punto A, siendo mayor que su distancia al punto B y mayor también que el segmento AB, no puede se media proporcional entre estas longitudes.

Resumiendo: Sobre la recta indefinida que une los puntos A y B existen dos puntos P y P´, y no más de dos, que dividen el segmento AB en *media y extrema razón.*

El primero P, interior al segmento, y el segundo P´exterior al mismo. En el primer caso, los segmentos PA y PB reciben el nombre de ADITIVOS, y en el segundo caso, los segmentos P´A y P´B, son llamados SUSTRACTIVOS.

Para determinar esos dos puntos P y P´, basta conocer PA y P´A. Ahora bien, si de la igualdad (2) restamos la igualdad (1) tendremos:

$\overline{P'A}^2 - \overline{PA}^2 = AB \times P'B - AB \times PB = AB(P'B - PB)$ o también:

(P´A+PA)(P´A-PA) = AB (P´B – PB), como

P´A + PA = PP´

P´B – PB = PP´ resulta que:

PP´(P´A – PA) = AB x PP´ y como consecuencia

P´A – PA = AB de donde P´A = PA + AB

Por otra parte, la expresión (1) podemos ponerla de la forma siguiente:

$\dfrac{PA + AB}{AB} = \dfrac{PA + PB}{PA}$, o también $\dfrac{P'A}{AB} = \dfrac{AB}{PA}$

de donde: $\overline{AB}^2 = PA \times P'A$

Por lo tanto nos encontramos con que:

P´A – PA = AB y $P'A \times PA = \overline{AB}^2$

Como consecuencia, la determinación de los segmentos P´A y PA equivale a construir dos egmentos cuya diferencia sea igual a AB y cuyo producto sea $\overline{AB}^2$. Ejercicio ya resuelto en la geometría elemental y que volvemos a recordar.

Levantamos por el extremo B una perpendicular BC al segmento AB, e igual a su mitad. Desde el punto C como centro, y con CB como radio, describimos una circunferencia que cortara a la recta que une los puntos A y C en D y D´. El segmento AD será la longitud PA, y el segmento AD´ será la otra incógnita PA´. Dos arcos de circulo trazados desde el punto A como centro y con radios AD y AD´, nos darán, en su intersección con la recta a la que pertenece el segmento AB, los puntos buscados P y P´. (F-1).

Si designamos por **p** y **q** a la diferencia y al producto de los segmentos dados, tendremos:

$$CD = CD' = CB = \frac{AB}{2} = \frac{P}{2} \quad \text{y} \quad \overline{AB}^2 = q \quad \text{de donde} \quad AB = \sqrt{q}$$

por otro lado:

$$AC = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\frac{P^2}{4} + q} \text{, por lo tanto}$$

$$PA = AD = AC - DC = \sqrt{\frac{P^2}{4} + q} - \frac{P}{2}$$

$$P'A = AD' = AC + CD' = \sqrt{\frac{P^2}{4} + q} + \frac{P}{2}$$

Si hacemos ahora AB = a, y reemplazamos *p* por *a* y *q* por a^2, tendremos:

$$PA = \sqrt{\frac{P^2}{4} + q} - \frac{P}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2 + 4a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2(1+4)}{4}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} =$$

$$= \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5} - 1$$

Por lo tanto.

$$PB = AB - PA = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{2a - a(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{a[2-(\sqrt{5}-1)]}{2} = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$$

$$P'B = AB + P'A = a + \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1) = \frac{2a + a(\sqrt{5}+1)}{2} = \frac{a[2+(\sqrt{5}+1)]}{2} = \frac{a}{2}(3+\sqrt{5})$$

El segmento PA, mayor de los dos resultantes al dividir el segmento total AB en media y extrema razón, es conocido con el nombre de *segmento de oro* del segmento AB.

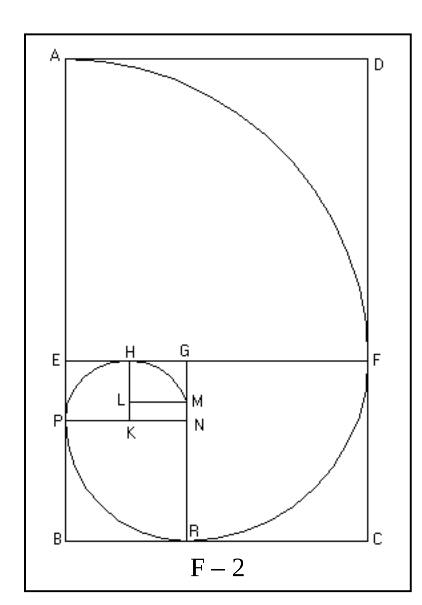
A su vez, el segmento PB, menor de los dos obtenidos es *segmento áureo* del segmento mayor PA.

Como hemos visto anteriormente:

$\overline{PA}^2 = AB \times PB$, o lo que es lo mismo $\frac{AB}{PA} = \frac{PA}{PB}$

Como ya sabemos: **En toda igualdad fraccionaria, la suma o diferencia de los numeradores, partidas respectivamente por la suma o diferencia de los denominadores, forma una fracción igual a cualquiera de las propuestas**. Por lo tanto:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AB - PA}{PA - PB} \qquad \frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PA - PB} \qquad \overline{PB}^2 = PA(PA - PB)$$



F – 2

que confirma la relación existente entre los dos segmentos en que ha quedado dividido el segmento total AB por el punto P. Razonamiento que se seguirá repitiendo para las sucesivas divisiones que fuésemos realizando.

Esta característica que nos ofrece el *segmento áureo* obtenido al dividir un segmento en *media y extrema razón*, fue aprovechada por los profesionales de la expresión artística a lo largo de todos los tiempos como hemos podido comprobar en la primera parte de este trabajo.

Todo lo anterior justifica que si a un rectángulo ABCD, cuyo lado menor es segmento áureo del mayor, se le resta un

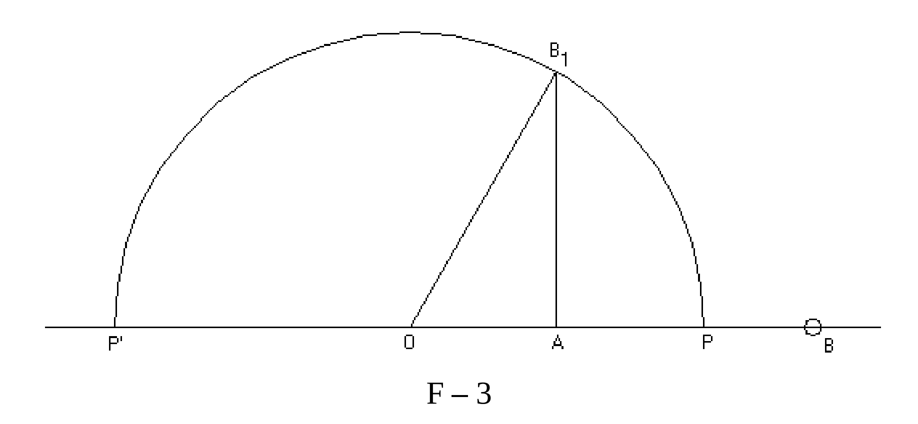
cuadrado de lado igual al menor, se obtiene un rectángulo EBCF semejante al primero (F-2). Esta operación podemos repetirla sucesivamente según nuestros deseos. En la primera parte de este trabajo, hemos visto la aplicación artística de esta propiedad al observar las espirales que conforman el caparazón y la estructura de algunos animales y que se adaptan a las medidas de la *proporción áurea.*

2.2 **SEGUNDO PROCEDIMIENTO**.

El segundo procedimiento para la resolución de este problema surgió como consecuencia de la observación de las fórmulas obtenidas en el desarrollo del procedimiento anterior.

Hemos deducido anteriormente que:

$$PA = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \text{ y } P'A = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$$



F – 3

representaban las longitudes de las dos partes de un segmento que ha sido dividido en media y extrema razón por un punto P.

En ambas fórmulas entra el componente $\sqrt{5}$ que puede considerarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados cumplan la siguiente condición:

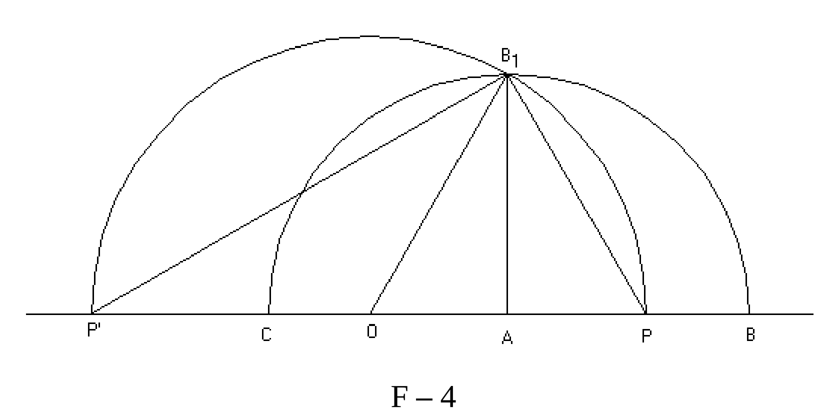
$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + 2^2 \text{ o sea } \sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

Establecida esta dependencia, añadiendo y quitando la unidad, etc, podríamos hallar los puntos que buscamos. Como consecuencia de este estudio se dedujo la siguiente regla:

En el extremo A del segmento AB se levanta una perpendicular AB_1 de igual longitud que AB. Tomamos $AO = \frac{AB}{2}$ en la prolongación de AB, y con centro en 0 y radio $0B_1$ se traza una semicircunferencia. Los puntos P y P´ en que este arco corta a la recta a la que pertenece el segmento AB, dividen al mismo en media y extrema razón (F – 3).
Para demostrarlo, trazamos también la semicircunferencia de radio AB_1 (F – 4).

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$\overline{AB_1}^2 = \overline{AB}^2 = PA \times P´A$ expresión que podemos escribir como: $\frac{AB}{PA} = \frac{P´A}{AB}$ (1)



F – 4

En toda igualdad fraccionaria, **la suma o diferencia de los dos primeros términos, partidas respectivamente por la suma o diferencia de los otros dos, es igual al primero partido por el tercero, ó al segundo partido por el cuarto**.

Por lo tanto la igualdad anterior podemos ponerla de la forma:

$$\frac{AB - PA}{P´A - AB} = \frac{PA}{AB} \quad \text{o también} \quad \frac{PB}{P´C} = \frac{PA}{AB} \quad (2)$$

Como vemos, en la expresión anterior aparece P`C que vamos a demostrar que es igual a PA.

Si nos fijamos en la figura, observamos que:

Por un lado $\begin{cases} P'C = P'O - CO \\ PA = PO - AO \end{cases}$ como $P'O = PO$ y $CO = \dfrac{CA}{2} = AO$ resulta que

$P'C = P'O - CO = PO - AO = AP$ tal y como queríamos demostrar.

Si en la expresión (2), cambiamos los extremos nos quedaría:

$$\frac{AB}{P'C} = \frac{PA}{PB} \quad , \quad \text{como} \quad P'C = PA \quad , \text{ obtendríamos que } \quad \frac{AB}{PA} = \frac{PA}{PB}$$

Si en la expresión (1), aplicamos el principio de la suma que se cumple en toda proporción, obtenemos:

$$\frac{AB}{PA} = \frac{P'A}{AB} \qquad \frac{AB + PA}{P'A + AB} = \frac{AB}{P'A} \text{ como}$$

$$\begin{cases} AB + PA = AC + P'C = P'A \\ P'A + AB = P'B \end{cases} \quad \text{y resulta que} \quad \frac{AB}{P'A} = \frac{P'A}{P'B}$$

que demuestra la segunda parte del enunciado al ver como el punto P´ también divide al segmento AB en media y extrema razón.

Una vez demostrado que con la construcción realizada los puntos P y P´ son los puntos buscados, obtenemos con facilidad los valores de PA y P´A en función de AB = a .

Aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\overline{OB_1}^2 = \overline{AB_1}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{AB}^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$OB_1 = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$PA = PO - AO = OB_1 - AO = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$P'A = P'O - AO = OB_1 + AO = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$$

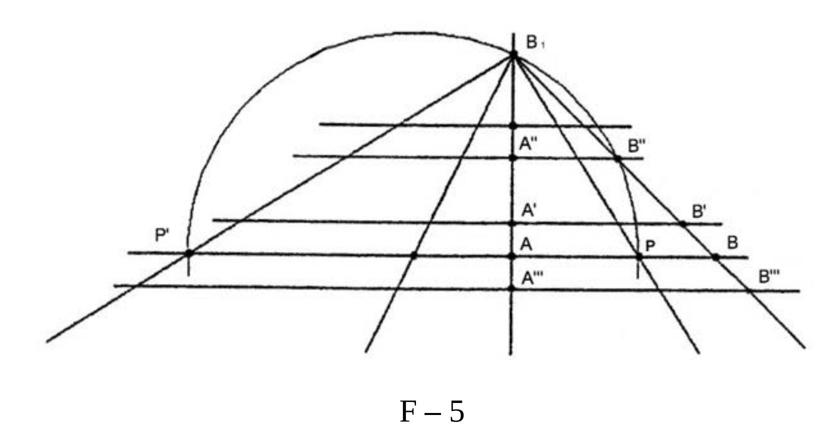
$$PB = AB - AP = a - \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$$

$$P'B = AB + AP' = a + \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)$$

$$PP' = 2OB_1 = 2\times\frac{a}{2}\sqrt{5} = a\sqrt{5} \qquad (3)$$

Si nos detenemos a examinar los dos métodos que hemos seguido para dividir el segmento AB en media y extrema razón, nos daremos cuenta de la mayor sencillez del seguido en segundo lugar. En este, no hay que trazar mas que un solo arco de circunferencia para obtener los puntos P y P´, mientras que en el primer método, tenemos que trazar tres arcos de distinto radio para hallar los mismos puntos. Así mismo, en la segunda construcción, obtenemos los dos puntos de una sola vez, proporcionando los mismos resultados pero de una forma más elegante que aplicando el primer método.

Además, si se tiene que dividir en media y extrema razón otros segmentos, tal y como se ha hecho con el segmento AB, basta hacer una sola vez la construcción indicada y, para los demás segmentos, tomar a partir del punto B_1 , en el segmento B_1A, las magnitudes B_1A', B_1A'', B_1A''', ... etc; los segmentos A'B', A''B'', A'''B''', ... etc, paralelos al segmento AB, trazados por A', A'', A''', . etc, quedarán divididos por B_1P y B_1P' en media y extrema razón. (F - 5)



F – 5

Esta figura presenta también la particularidad de contener los elementos necesarios para inscribir en la circunferencia de radio AB, todos los polígonos regulares que pueden serlo con auxilio únicamente de la regla y el compás, tal y como vamos a ver a continuación.

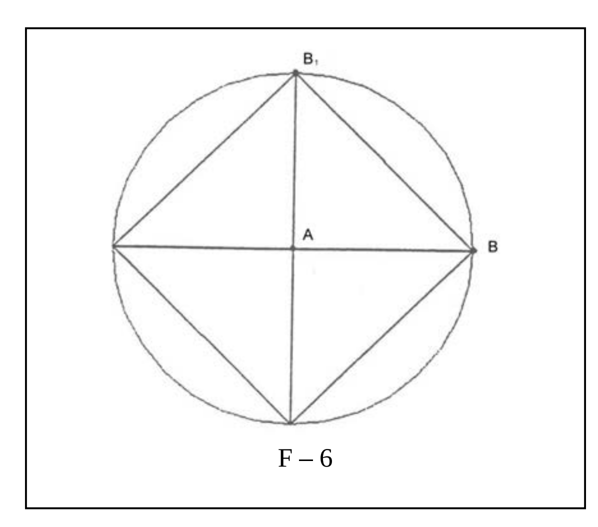
CUADRADO

En el triángulo rectángulo AB B_1 , tenemos que:

$$\overline{BB_1}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB_1}^2 \quad ,, \quad \text{como } AB = A\,B_1$$

$$\overline{BB_1}^2 = 2 \cdot \overline{AB}^2 \quad ,, \quad BB_1 = \sqrt{2 \cdot \overline{AB}^2} = AB\sqrt{2}$$

Por lo tanto BB_1 es el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia de radio AB (F – 6).



F – 6

PENTÁGONO CONVEXO

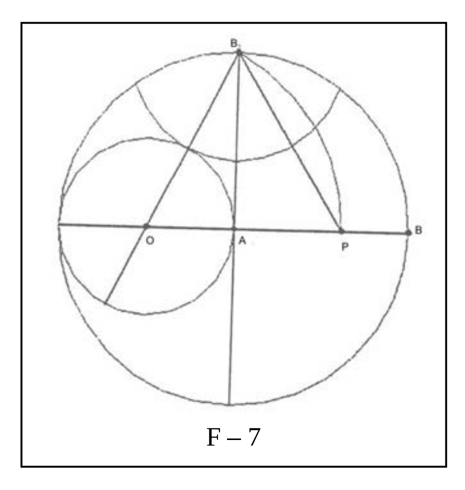
El lado B_1P, por ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos el radio A B_1 = AB, y el lado del decágono convexo PA = segmento áureo o segmento mayor del radio dividido en media y extrema razón, será igual a:

$$\overline{B_1P}^2 = \overline{AB_1}^2 + \overline{PA}^2 \quad ,, \quad \text{como} \quad PA = \frac{AB_1}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{tendremos que:}$$

$$\overline{B_1P}^2 = \overline{AB_1}^2 + \frac{\overline{AB_1}^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} = \overline{AB_1}^2 + \frac{\overline{AB_1}^2(5+1-2\sqrt{5})}{4} =$$

$$= \overline{AB_1}^2 + \frac{\overline{AB_1}^2(6-2\sqrt{5})}{4} = \frac{\overline{AB_1}^2}{4}(10-2\sqrt{5}),,$$

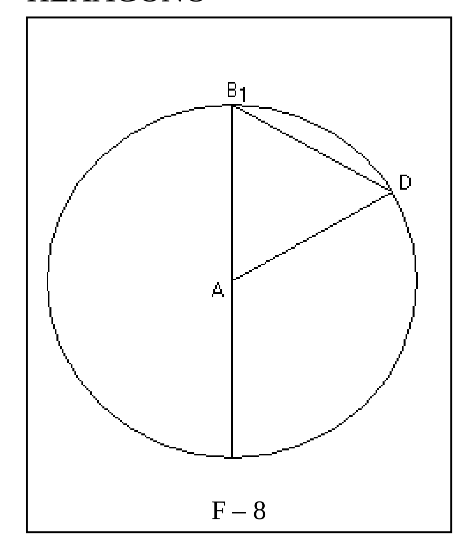
$$B_1P = \sqrt{\frac{\overline{AB_1}^2(10-2\sqrt{5})}{4}} = \frac{AB_1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$



F – 7

que como ya sabemos es el valor del lado del pentágono regular convexo en función del radio de la circunferencia circunscrita. (F – 7)

HEXÁGONO

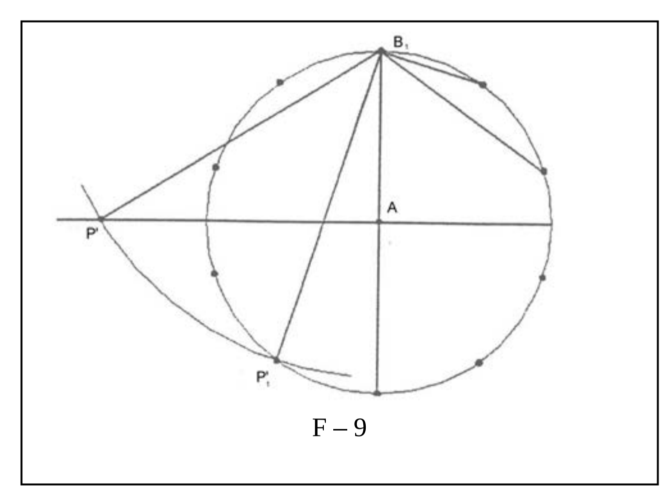


F – 8

El triángulo ADB_1 es equilátero, porque siendo isósceles en B_1 y D, el ángulo central en A vale $\frac{360^o}{6} = 60^o$. Por lo tanto la suma de los ángulos en B_1 y D valen 120º, y como consecuencia 60º cada uno de ellos. De esta forma se confirma que el lado del hexágono regular convexo es igual al radio de la circunferencia circunscrita. (F – 8)

PENTÁGONO REGULAR DE SEGUNDA ESPECIE

Si dividimos la circunferencia de radio AB_1 en diez partes iguales y se unen de dos en dos estas divisiones, obtendremos un pentágono regular convexo; uniéndolas de cuatro en cuatro, obtendremos el lado del pentágono regular estrellado de segunda especie y diagonal del anterior. (F – 9)



F – 9

El lado de este polígono es B_1P' , puesto que los catetos del triángulo rectángulo AB_1P' son:

AB_1 = radio de la circunferencia circunscrita

AP' = lado del decágono de tercera especie $= \frac{AB_1}{2}(\sqrt{5}+1)$

Por lo tanto:

$$\overline{B_1P'}^2 = \overline{AB_1}^2 + \overline{AP'}^2 = \overline{AB_1}^2 + \frac{\overline{AB_1}^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2 = \frac{\overline{AB_1}^2}{4}(10+2\sqrt{5}),,$$

$$B_1P' = \sqrt{\frac{\overline{AB_1}^2(10+2\sqrt{5})}{4}} = \frac{AB_1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Si comparamos las dos expresiones obtenidas para los lados del pentágono regular convexo y para el lado del pentágono regular estrellado de segunda especie, vemos fácilmente que el primero es *segmento áureo* del segundo.

En la figura (F – 5), tenemos los dos triángulos APB_1 y AB_1P' en los que podemos establecer:

$$\frac{B_1P}{AP} = \frac{B_1P'}{B_1A} \qquad \text{de donde}$$

$$B_1P = \frac{B_1P' \times AP}{B_1A} = \frac{B_1P' \frac{B_1A(\sqrt{5}-1)}{2}}{B_1A} = \frac{B_1P' \times B_1A(\sqrt{5}\text{-}1)}{2B_1A} = \frac{B_1P'(\sqrt{5}\text{-}1)}{2}$$

Por lo tanto el lado del pentágono regular convexo es el mayor segmento aditivo de los que dividen la diagonal del mismo pentágono, (lado del pentágono regular estrellado de segunda especie), en media y extrema razón.

DECÁGONO REGULAR CONVEXO

El lado del decágono regular convexo es el mayor segmento aditivo de los que dividen al radio en media y extrema razón. Como ya hemos visto anteriormente su valor es:

$$AP = \frac{AB_1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

DECÁGONO REGULAR ESTRELLADO DE TERCERA ESPECIE

El lado del decágono regular estrellado de tercera especie es el menor segmento sustractivo de los que dividen al radio en media y extrema razón. En nuestro caso se trata del segmento AP’, cuyo valor hallado anteriormente es:

$$AP' = \frac{AB_1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

2.3 TERCER PROCEDIMIENTO POR INTERSECCIÓN DE CURVAS CONOCIDAS

Si en la proporción $\frac{AB}{PA} = \frac{PA}{PB}$, que es la que nos marca el inicio del problema de dividir un segmento en media y extrema razón, consideramos cada una de las dos razones por separado, y suponemos que los valores de PA y PB varían de una forma continua, encontraremos para cada valor de PA y PB uno diferente para la relación que se considere, que también variará de una forma continua. Entre la serie de valores de ambas relaciones, podremos encontrarnos con valores iguales que serán los que cumplan las condiciones del problema.

Para ver con claridad esta variación continua, podemos imaginar un móvil que recorre la recta AD en el sentido de A a B partiendo del infinito negativo; estudiar el valor que toma cada una de las relaciones anteriores y compararlas. (F – 10)

Esta comparación se hará más fácilmente observando que si las relaciones varían de un modo continuo, podrán representarse sus cambios gráficamente por líneas y, si no es posible, hallar sus ecuaciones. Los puntos de intersección que tengan las curvas que representan, serán, por supuesto, las correspondientes a los valores iguales que toman las conocidas relaciones.

Para esta representación, adoptaremos un sistema de ejes coordenados ortogonal cuyo origen sea el punto A. (F – 10)

Tomaremos como abscisas las distancias al origen desde las posiciones que ocupa el móvil y consideraremos como ordenadas los valores que toman cada una de las relaciones. Con estos datos hallaremos puntos de las curvas, con cuyo auxilio podremos determinar sus ecuaciones.

2.3.1. *Curva representada por la relación AB/PA*

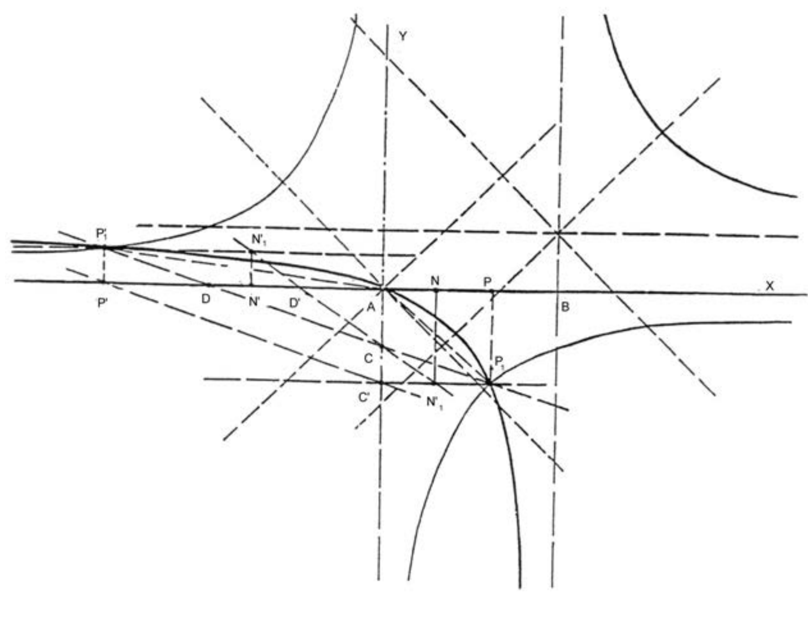
Suponiendo que el móvil parte del infinito negativo y llega hasta el infinito positivo, obtendremos los siguientes valores para las abscisas y ordenadas, al considerar:

AB = distancia fija = a

PA = valores de x (ordenadas)

$\frac{AB}{PA}$ = valores de y (abscisas)

P = punto móvil



F – 10

VALORES DE X	- ∞	- a	0	$+\frac{a}{2}$	+ a	+ 2a	+ ∞
VALORES DE Y	0	+ 1	± ∞	- 2	- 1	$-\frac{1}{2}$	0

Por ejemplo, si partimos de:

$$PA = x = -\infty \quad \text{(ordenada)}$$

$$\frac{\text{AB}}{\text{PA}} = y = \frac{a}{-\infty} = 0 \quad \text{(abscisa)}$$

De esta forma, iremos dando valores a **x** obteniendo los correspondientes de **y**; tendremos que tener en cuenta el signo que le acompañará según el sentido en que se mueve el punto P.

Con este cuadro de valores, hay datos más que suficientes para hallar la ecuación de una posible curva de segundo grado. Como ya sabemos, bastan cinco condiciones para determinarla y, en este caso, conocemos siete puntos. Por lo tanto disponemos de siete condiciones para hallar los valores de los coeficientes. Así mismo el problema es posible, ya que de los puntos cuyas coordenadas conocemos, no hay tres que estén en línea recta.

Para resolver este problema, vamos a hallar los valores de los seis coeficientes de la ecuación general de segundo grado con dos variables:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

Si sustituimos el primer par de valores (- ∞, 0) para **x** e **y**, obtenidos anteriormente, en la ecuación general, obtendremos:

$Cx^2 + Ex + F = 0$ como ya sabemos

$$\lim_{x \to -\infty} (Cx^2 + Ex + F) \approx \lim_{x \to -\infty} Cx^2 = 0$$

por lo tanto $C = 0$

Igualmente aplicando los valores obtenidos en tercer lugar (0,± ∞), obtendremos:

$Ay^2 + Dy + F = 0$ siguiendo el criterio anterior

$$\lim_{x \to \pm\infty} (Ay^2 + Dy + F) \approx \lim_{x \to \pm\infty} Ay^2 = 0$$

Por lo tanto $A = 0$

$$C = 0$$
$$A - aB + a^2C + D - aE + F = 0$$
$$A = 0$$
$$4A - aB + \frac{a^2C}{4} - 2D + \frac{aE}{2} + F = 0$$
$$A - aB + a^2C - D + aE + F = 0$$
$$\frac{A}{4} - aB + 4a^2C - \frac{D}{2} + 2aE + F = 0$$

Con estos resultados obtenemos las siguientes ecuaciones que corresponden a los seis primeros:

En este sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, reducido a cuatro al ser $A = 0$ y $C = 0$, obtenemos, una vez resuelto, los siguientes valores para el resto de los coeficientes:

$B = +1$,, $D = 0$,, $E = 0$,, $F = +a$

que sustituidos en la ecuación general obtenemos la ecuación xy + a = 0 (1)

para la curva buscada, que, como ya sabemos, se trata de una hipérbola, al verificarse que:

$$B^2 - 4AC = 1 > 0$$

Esta hipérbola, al no contener en su ecuación más que el término **xy**, así como el constante, tiene por asíntotas los ejes coordenados y, además, es equilátera; circunstancias que podían suponerse al examinar el cuadro de valores de las coordenadas anteriormente deducidas. Esta hipérbola, representada por línea de trazo fino en la figura tiene por centro el origen de coordenadas. (F – 10)

2.3.2. Curva representada por la relación PA/PB

De un modo similar y siguiendo los mismos criterios que en el caso anterior, es decir, suponiendo el móvil que recorre la recta en el sentido AB y partiendo de **-** ∞, se halla el cuadro de valores siguientes:

VALORES DE X	- ∞	- a	0	$+\frac{a}{2}$	+ a	+ 2a
VALORES DE Y	+ 1	$+\frac{1}{2}$	0	- 1	± ∞	+ 2

Sustituidos estos valores en la ecuación general, y aplicando la teoría de límites, como hemos hecho en el caso anterior, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$C = 0$$

$$A\text{-}2aB + 4a^2C + 2D\text{-}4aE + 4F = 0$$

$$F = 0$$

$$4A\text{-}2aB + a^2C - 4D + 2aE + F = 0$$

$$A = 0$$

$$4A + 4aB + 4a^2C + 2D + 2aE + F = 0$$

Resuelto este sistema, hallamos los valores de:

B = +1 ,, D = - a ,, E = - 1

dando como consecuencia la ecuación de la curva:

$$xy - ay - x = 0 \qquad (2)$$

en la que :

$$B^2 - 4AC = 1 > 0$$

lo que nos indica que se trata también de una hipérbola cuyas asíntotas son paralelas a los ejes coordenados al faltar los términos x^2 e y^2 . En la figura la hemos representado por línea de trazo grueso.

Para referirla a su centro, hallaremos las coordenadas de este, derivando respecto a x e y, la correspondiente ecuación $xy - ay - x = 0$

$$f'(y) = x_1 - a = 0 \qquad x_1 = +a$$
$$f'(x) = y_1 - 1 = 0 \qquad y_1 = +1$$

Trasladando ahora el centro de coordenadas al de esta curva, obtendremos la ecuación:

$$x_1 y_1 - a = 0$$

que como ya sabemos, es la de una hipérbola equilátera, igual a la obtenida anteriormente, pero cuyo eje transverso es perpendicular al de ésta.

Si cambiamos de ejes coordenados para referir las hipérbolas a los suyos correspondientes, obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2a} = -1$$
$$\frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2a} = +1$$

2.3.3. *Determinación de las soluciones comunes*

Conocidas las ecuaciones (1) y (2), de ambas curvas, la resolución del sistema:

$$xy + a = 0$$
$$xy - ay - x = 0$$

nos dará, con sus raíces comunes, los puntos de intersección cuyas abscisas dividirán a la recta dada en media y extrema razón.

Despejando **y** en la primera, y sustituyendo en la segunda, tendremos la ecuación:

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \qquad (3) \quad \text{de donde:}$$

$$x_1 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right),, \qquad x_2 = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) \qquad (4)$$

que son los valores ya conocidos.

Si deseamos conocer las ordenadas de estos puntos de intersección, por medio de las ecuaciones (1) y (2), tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} xy + a = 0 \\ xy - ay - x = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} x = -\dfrac{a}{y} \\ \\ x(y-1) - ay = 0,, \qquad x = \dfrac{ay}{y-1} \quad \text{por lo tanto} \end{array}$$

$$\frac{-a}{y} = \frac{ay}{y-1},, \qquad ay^2 + ay - a = 0$$

, que una vez resuelta obtenemos:

$$y_1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2},, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (5)$$

OBSERVACIONES

1.- Las ordenadas de los puntos de intersección son independientes de la longitud del segmento AB = a. Por lo tanto estos valores, o sea las dos rectas paralelas al eje x que representan las ecuaciones

(5), son el lugar geométrico de los puntos de intersección de todas la hipérbolas que pudieran construirse al variar la longitud del segmento dado.

2.- Las longitudes de las ordenadas, son a su vez los dos segmentos de una recta, de la unidad de longitud, dividido en media y extrema razón; que, por consiguiente, estarán con las abcisas en la relación $\frac{1}{a}$.

3.- Si suponemos constante la longitud AB = a del segmento dado, y variable la de la unidad, se invierten los términos de las anteriores consecuencias, lo que equivaldría a que el segmento AB = a hiciera de unidad, o de otro modo, que los puntos P y P' serían fijos, y los de intersección de todas la hipérbolas se hallarían en las paralelas del eje **y** , trazadas por P y P' .

2.3.4. *Simplificación del procedimiento anterior al sustituir una de las hipérbolas por una recta*

2.3.4.1.Primera simplificación

Como ya conocemos las coordenadas de los puntos de intersección en ambas hipérbolas, expresiones (4) y (5), podemos sustituir una de ellas, la que no está referida a su centro, por la recta que pasa por los puntos de la intersección con la otra.

Si lo hacemos así, obtendremos la ecuación:

$$y = -\frac{x}{a} - 1$$

que representa una recta, fácil de construir, en la posición de la P_1 P_1'. (F-10).

La ecuación anterior, puede obtenerse también por el procedimiento general para estos casos, que en el presente se reduce a restar las ecuaciones (1) y (2), con lo que se obtiene inmediatamente la recta anterior.

$$x\,y + a = 0$$

$$x\,y - a\,y - x = 0$$

restando ambas ecuaciones:

$$x\,y + a - x\,y + a\,y + x = 0$$

$$a + a\,y + x = 0$$

$$a\,y = - x - a$$

$$y = \frac{-x-a}{a} = -\frac{x}{a} - 1$$

donde el valor de $y = -\frac{x}{a} - 1$ es igual al anterior.

Esta ecuación que, como vemos, es función únicamente de AB = a, magnitud del segmento dado, en unión de la ecuación (1), forma un sistema de ecuaciones del que eliminando **y**, se llega, sin problemas, a la ecuación (3), y, por lo tanto, a los valores (4) y (5) ya obtenidos anteriormente.

2.3.4.1.1. Observaciones a esta primera simplificación

1.- Los triángulos rectángulos $CC'P_1$ y $DP_1'P'$, son iguales por ser triángulos equiángulos y, porque siendo $PA = x_1$ y $P'A = x_2$ cuyos valores son los de la expresión (3) hallados anteriormente, tendremos:

$$P'D = P'A - DA = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

lo que equivale a que $P'D = AP = C'P_1$

Por ser iguales los mencionados triángulos, lo serán las rectas CP_1 y DP_1', lo que nos dice que los puntos P_1 y P_1' equidistan del centro de la recta CD y, por consiguiente, no será necesario para hallarlos conocer más que la posición de uno de ellos. Además, si se unen los puntos C’ y P’, la recta C’P’ es paralela a la recta CD.

2. El área del triángulo ADC está expresada por $\frac{a}{2}$, y las de los triángulos AP_1'P' y AP_1P también; circunstancias que podían adivinarse al tratarse de una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas. En este caso la particularidad es, que el área constante, que supone el producto **xy**, sea la del triángulo determinado por la recta que une los puntos de intersección de las dos hipérbolas al cortar a los ejes coordenados, propiedad que permite trazar las hipérbolas por puntos, transformando dicho triángulo ADC en otros rectángulos equivalentes, cuyas bases estén en la recta AD. Los vértices C de estos triángulos serán puntos de la hipérbola.

3.-Una vez conocidos los puntos P_1 y P_1' , es decir, dividido el segmento dado, si hubiese que dividir otro, no sería necesario repetir las construcciones; bastará trazar por P_1 y P_1' las paralelas al eje de las **x** para determinar el lugar geométrico antes citado, si la recta dada es la AD' , uniendo D' con C, los puntos N_1 y N_1' en que D'C corte a las paralelas citadas darán, proyectándolos sobre AB, los N y N' que satisfacen las condiciones deseadas.

2.3.4.2. Segunda simplificación

Este procedimiento, si se desea llevar a la práctica, exigirá construir las dos ramas de la hipérbola para hallar su intersección con la recta, pero se puede simplificar un poco sustituyendo la hipérbola citada por la segunda, cuyo centro está en el punto:

$$x = + a \qquad\qquad y = + 1$$

ya que bastará construir una sola rama de la hipérbola. En este caso, analíticamente, se formará con las ecuaciones (2) y (6) un sistema de ecuaciones cuyas soluciones comunes serán las pedidas. Haciéndolo así, se llega sin dificultad, como anteriormente, a la ecuación (3), y, por lo tanto a los valores expresados en (4) y (5).

2.4.- OTRAS SOLUCIONES DEL PROBLEMA.-

Los procedimientos anteriores, aunque de solución precisa, no están comprendidos entre aquellos procedimientos para los que solamente son necesarios la regla y el compás. La necesidad de construir hipérbolas, les quita la sencillez que en estos casos debemos buscar, conservando solo un interés especulativo. Sin embargo, el segundo de los procedimientos nos ha conducido a determinar una línea recta, con cuyo conocimiento hemos hallado otras construcciones o procedimientos para los que basta el empleo de la regla y el compás, como veremos a continuación.

Todos ellos se basan en que los puntos P y P' que se buscan son las proyecciones sobre el eje de las **x** de los puntos P_1 y P_1' situados sobre la rectas CD; por lo tanto la cuestión se reduce a determinar P_1 y P_1' para conocer P y P'. Las numerosas soluciones que pueden darse vamos a reunirlas en distintos grupos. (F-10).

2.4.1. Primer Grupo

Ya dijimos anteriormente que $CP_1 = DP_1'$, luego el punto medio de CD, equidista de P_1 y P_1' (F-10). Por lo tanto:

$$CP_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \sqrt{1+a^2}$$

$$CD = \sqrt{1+a^2}$$

$$P_1P_1' = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1+a^2}$$

Esta fórmula general puede fácilmente construirse; después bastará tomar su mitad a uno y otro lado del centro CD para hallar P_1 y P_1'. Pero como el variar la unidad elegida, no hace variar los puntos P y P', los valores particulares de **a** pueden conducir también a construcciones particulares, deducidas de la general anterior. Haciendolo así resulta:

Valores de a	1	2	3	4	5	etc.
Valores de P_1P_1'	$\sqrt{10}$	5	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{5}\sqrt{17}$	$\sqrt{5}\sqrt{26}$	etc.

De estos valores, el más sencillo es el segundo, luego puede deducirse de él la siguiente regla:

Se traza la recta CD, de modo que AD = 2AC, siendo AD = AB el segmento dado, tomando a partir del punto medio de CD, a uno y otro lado 2,5AC, obtenemos los puntos P_1 y P_1' y por consiguiente P y P', proyectándolos sobre el eje **x** (F-10). Análogamente se deducirán las reglas correspondientes a los demás valores.

2.4.2.- Segundo Grupo

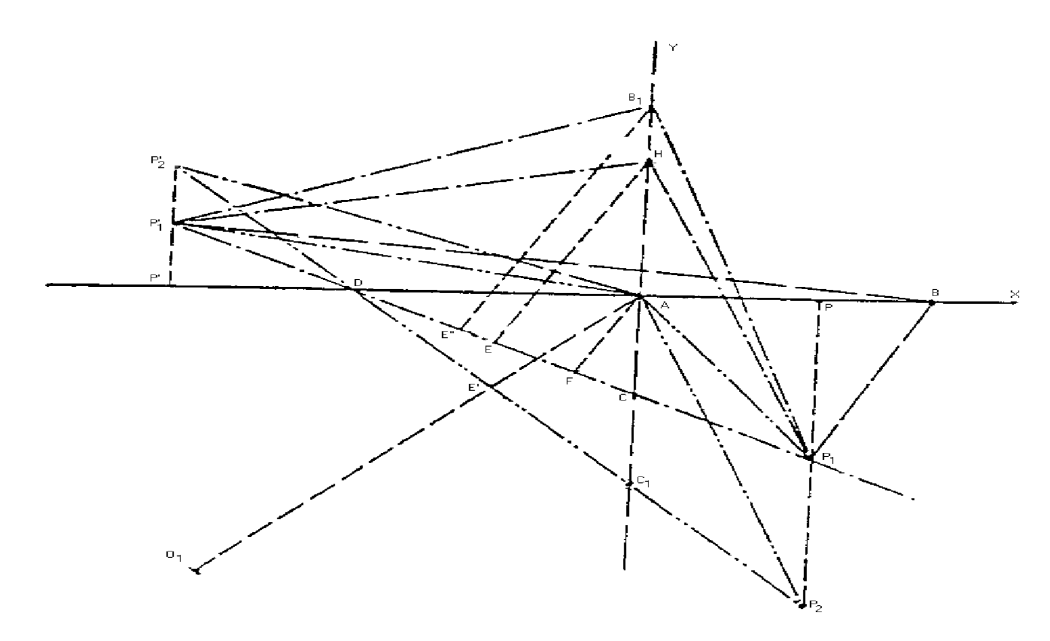
Si en el punto medio E de CD, levantamos una perpendicular hasta que corte al eje de las **y** en H, es evidente que bastará que conozcamos el radio de la circunferencia, cuyo centro esté en H y pase por los puntos P_1 y P_1'.(F-11).

En este caso, el triángulo rectángulo EP_1H, tiene por catetos:

$$EP_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{1+a^2} \quad \text{y} \quad EH = \frac{a\cdot\sqrt{1+a^2}}{2}$$

el primero mitad de P_1P_1', ya hallado antes, y el segundo que se determina fácilmente en la figura, al poder hallar $HP_1 = R$, ya que:

$$HP_1 = R = \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{EP_1}^2} = \sqrt{\frac{5\cdot\left(1+a^2\right)+a^2\cdot\left(1+a^2\right)}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^4+6a^2+5}$$



F – 11

construcción que puede traducirse en una regla y cuya construcción no presenta dificultad.

Haciendo ahora que varíe **a**, tendremos:

Valores de a	1	2	3	4	5
Valores de R	$\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$	$\frac{\sqrt{357}}{2}$	$\sqrt{195}$

de estos valores, el primero es sumamente sencillo de construir y está presentado en la figura por los segmentos AP_2 y AP_2'.

2.4.3. Tercer Grupo

Si se considera el triángulo isósceles P_1HP_1', del que conocemos el vértice H, y la posición y punto medio de la base, se podrán determinar los puntos P_1 y P_1' determinando el radio del círculo circunscrito al mismo.(F-11).

Este radio, en función de los lados que concurren en H y de su altura EH = h, tendrá como valor:

$$R_1 = \frac{a'^2}{2\cdot h}$$

en cuya expresión, **a'** es el valor obtenido para R en los problemas del segundo grupo, y **h** el que obtuvimos con anterioridad.

Con todo lo anterior, resulta que:

$$R_1 = \frac{a^4 + 6a^2 + 5}{4\cdot a\sqrt{1 + a^2}}$$

dando valores distintos, como hemos hecho antes, tendremos:

Valores de a	1	2	3	4	5
Valores de R_1	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{9\sqrt{5}}{8}$	$\frac{7\sqrt{10}}{6}$	$\frac{21\sqrt{17}}{16}$	$\frac{3\sqrt{26}}{2}$

De estos valores, tomando el primero como más sencillo, podemos enunciar la siguiente regla: Se toma la recta dada AD, en los dos lados de un ángulo recto, se traza la recta C_1D, la perpendicular AE' a DC_1 y tomando $E'O_1 = DC_1$, el punto O_1 será el centro y O_1A el radio de una circunferencia que cortará a la recta C_1D en los puntos deseados.(F-11)

2.4.4. Cuarto Grupo

Se considera el triángulo $P_1B_1P_1'$, en el que el vértice B_1 se halla tomando AB_1=AB. (F-11). El radio del círculo circunscrito se halla como antes, determinando la altura h'= B_1E. Esta se deduce de la misma figura y nos viene dada por:

$$h' = \frac{a(1+a)\sqrt{1+a^2}}{1+a^2}$$

En este caso, los lados contiguos a esta altura no son iguales como antes, y tienen como valor:

$$a' = B_1P_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2\left(10-2\sqrt{5}\right)+4a\left(\sqrt{5}+1\right)+\left(6+2\sqrt{5}\right)}$$

$$b' = B_1P'_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2\left(10+2\sqrt{5}\right)-4a\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)}$$

que multiplicándolos, para simplificar el valor de R_2, resulta:

$$a'b' = \sqrt{5a^4+10a^3+6a^2-2a+1}$$ con lo que:

$$R_2 = \frac{a'b'}{2h'}$$ que nos facilita el cálculo.

Dando valores, como antes, a **a**, resulta:

Valores de a	1	2	3	4	etc.
Valores de R_2	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{5\sqrt{905}}{12}$	$\frac{\sqrt{1810}}{12}$	$\frac{7\sqrt{697}}{40}$	etc.

De estos valores, el más sencillo es el primero, que podría, igual que hemos hecho en los casos anteriores, traducirse en una regla.

2.4.5. Quinto Grupo

Se considera el triángulo P_1AP_1' y se halla el radio R_3 del círculo circunscrito (F-11).

En este caso, el producto de los lados **a'b'**, tiene por expresión:

$$a'b' = \sqrt{a^4 + 7a^2 + 1}$$ y la altura

$$AF = h'' = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Llamando R_3 al nuevo radio, tendremos:

$$R_3 = \frac{a'b'}{2h''}$$

Dando valores a **a**, como en los casos anteriores:

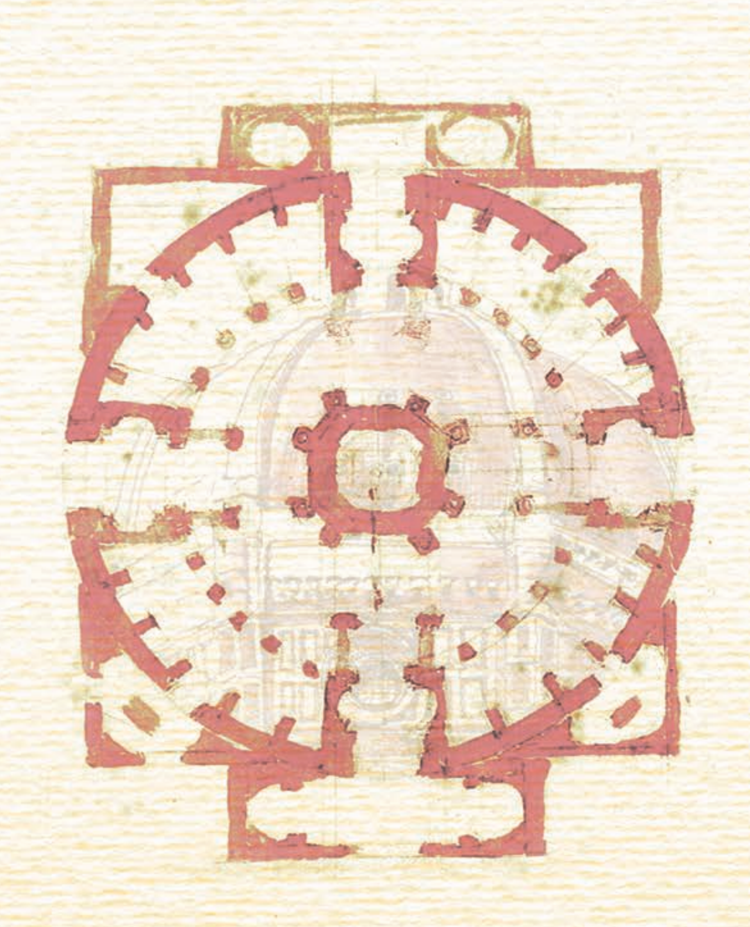
Valores de a	1	2	3	4	5
Valores de R_3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{5\sqrt{58}}{6}$	$\frac{3\sqrt{697}}{8}$	$\frac{3\sqrt{2314}}{10}$

Al examinar estos resultados, se observa, en primer lugar, que el valor de R_3 cuando a = 1, es el mismo obtenido antes para a = 1, de la fórmula del tercer grupo; esto es lógico que ocurra, ya que en ambos casos se llega al triángulo AP_2P_2' que da origen al mismo radio. Este valor de R_3, conduce a la regla ya establecida; pero $\frac{15}{4}$ que corresponde al valor de R_3 para a = 2, es también muy sencillo y podría admitirse como construcción general.

2.5.-OTRAS CONSTRUCCIONES POSIBLES QUE PODRÍAN DEDUCIRSE.-

Para no alargar más este trabajo, omitimos otras muchas construcciones que podrían deducirse; tal es la fecundidad de la construcción original. Siguiendo el mismo sistema anterior podríamos estudiar el triángulo BP_1P_1', (F-11), y hallar el radio del círculo circunscrito; determinar para cada triángulo de los que hemos estudiado el radio del círculo inscrito; hallar la distancia entre las paralelas C'P' y CD, (F-10); ver en todos los triángulos que se han considerado, las relaciones entre los valores de los ángulos, etc,…,etc. Para cada caso se deduciría no una construcción diferente, sino todo un grupo de construcciones que a pesar de deducirse de casos particulares, son completamente generales y aplicables a cualquier caso, puesto que unas difieren de otras, únicamente por la relación entre la longitud del segmento dado y la que se toma como unidad; y esta relación distinta como ya hemos demostrado, y debía ocurrir, no varía la posición de los puntos que sobre la recta indefinida la dividen en media y extrema razón.

ÍNDICE




UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA